2017 年　確率数理要論　レポート 1

2017 年 11 月 14 日

鈴木大慈

e-mail: taiji@mist.i.u-tokyo.ac.jp

- 提出方法：工学部 6 号館 1 階にある鈴木のポストに紙媒体で提出すること．
- 学生証番号・氏名を明記すること．
- 提出期限：2017 年 12 月 12 日（厳守）

問 1　以下の分布の特性関数を求めよ．その計算過程も記述すること．

(i) 指数分布 $\mathrm{Ex}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$: ただし，その確率密度関数 $f(x|\lambda)$ は

$$f(x|\lambda) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

で与えられる．

(ii) ガンマ分布 $\mathrm{G}(\theta, k)$ $(\theta > 0, k > 0)$: ただし，その確率密度関数 $f(x|\theta, k)$ は

$$f(x|\theta, k) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-x/\theta} & (x \geq 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

で与えられる．

問 2 指数分布に従う独立同一な確率変数 $(X_i)_{i=1}^n$ の和 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ の分布を特性関数を用いて求めよ．

問 3 実数値確率変数 X に関して，その分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ $(x \in \mathbb{R})$ の不連続点は高々加算個であることを示せ．

問 4 平均 $m \in \mathbb{R}$, 分散 $v > 0$ の (一次元) 正規分布を $N(m, v)$ と書く．δ_μ を分布関数が $F(x) = 0$ $(x < \mu)$, 1 $(x \geq \mu)$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の Borel 確率測度とする．このとき，

$$N(m, v) \rightsquigarrow \delta_m \quad (v \to 0)$$

を証明せよ．

問 5 $X_1, X_2, \ldots$ が独立同一に $[0, 1]$ 上の一様分布に従うとき，

$$\lim_{n\to\infty} (X_1 X_2 \ldots X_n)^{1/n} = e^{-1} \quad \text{(a.s.)}$$

となることを示せ．

問 6 優収束定理の反例を示せ．なお，その反例はどの条件が満たされていないかを明記せよ．

問 7 確率変数 X と Y が独立なら，任意の可測関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，$f(X)$ と $g(Y)$ も独立であることを示せ．

問 8 X を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の二乗可積分な確率変数とする．つまり，X は $\mathrm{E}[X^2] < \infty$ とする．$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする．$L^2_{\mathcal{G}}$ を $\mathcal{G}$-可測な二乗可積分な確率変数の集合とする．このとき，

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X|\mathcal{G}])^2] = \inf_{Z \in L^2_{\mathcal{G}}} \mathrm{E}[(X - Z)^2]$$

を示せ．つまり，$\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]$ は $\mathrm{E}[(X - Z)^2]$ を $Z \in L^2_{\mathcal{G}}$ の中で最小にすることを示せ．

問 9 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可積分な確率変数 X に対し，X の生成する σ-加法族 $\sigma(X)$ が $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ と独立なら，

$$\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] = \mathrm{E}[X] \quad \text{(a.s.)}$$

となることを示せ．

問 10 Berry-Esseen の定理について調べ，説明せよ．