確率数理工学補助スライド

鈴木　大慈
計数工学科
taiji@mist.i.u-tokyo.ac.jp

これまでの内容

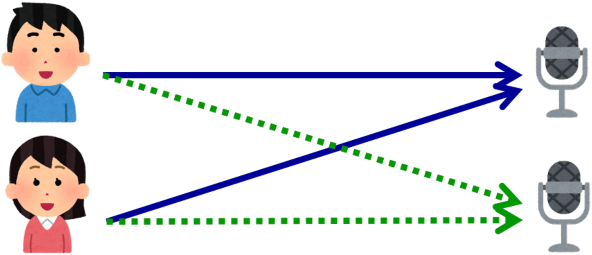
- 確率測度
  - 分布関数，密度関数，確率質量関数，同時分布
- 平均，分散，モーメント，キュムラント
- 様々な分布
- 母関数
  - モーメント母関数，特性関数，キュムラント母関数

$$M(t) = \mathrm{E}[e^{tX}],\ \phi(t) = \mathrm{E}[e^{itX}],\ \psi(t) = \log \phi(t)$$

  - モーメント，キュムラントの導出
  - 和の分布，Levy の反転公式→特性関数と分布の一対一対応
- 変数変換
  - 和の分布（畳み込み），比の分布
- 確率不等式
  - Young の不等式，Hölder の不等式，Minkovsky の不等式
  - Markov の不等式，Chebyshev の不等式，Hoeffding の不等式
- 大数の法則，中心極限定理
  - Levy の連続性定理

カクテルパーティー問題

複数人が同時に話している音声データを，それぞれの話者の声に分解したい．



ICA (独立成分分析)

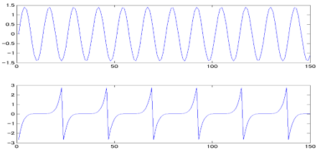
- $S = (S_1, S_2, \ldots, S_p)$: それぞれ独立
- 観測値: $X = AS$
- X を元の独立な信号 $S_1, \ldots, S_p$ に分解したい.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{p1} \end{pmatrix} S_1 + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{p2} \end{pmatrix} S_2 + \cdots + \begin{pmatrix} A_{1p} \\ A_{2p} \\ \vdots \\ A_{pp} \end{pmatrix} S_p$$

ICA (独立成分分析)

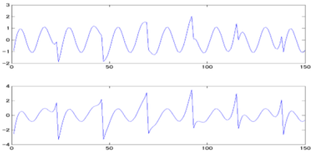
- $S = (S_1, S_2, \ldots, S_p)$: それぞれ独立
- 観測値: $X = AS$
- X を元の独立な信号 $S_1, \ldots, S_p$ に分解したい.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{p1} \end{pmatrix} S_1 + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{p2} \end{pmatrix} S_2 + \cdots + \begin{pmatrix} A_{1p} \\ A_{2p} \\ \vdots \\ A_{pp} \end{pmatrix} S_p$$



独立成分

$\Rightarrow$



混合された信号

ICA (独立成分分析)

- $S = (S_1, S_2, \ldots, S_p)$: それぞれ独立
- 観測値: $X = AS$
- X を元の独立な信号 $S_1, \ldots, S_p$ に分解したい.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{p1} \end{pmatrix} S_1 + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{p2} \end{pmatrix} S_2 + \cdots + \begin{pmatrix} A_{1p} \\ A_{2p} \\ \vdots \\ A_{pp} \end{pmatrix} S_p$$

1. X, S の平均は 0 であるとする（中心化）.
2. A は直交行列であるとする（白色化）.
   $\rightarrow$ $WA = I$ を満たす $W = A^{-1}$ を見つけられれば,

   $$WX = S$$

   で S を復元できる.

平均 0 の確率変数 Z の 4 次キュムラント

$$\kappa_4(Z) = \mathrm{E}[Z^4] - 3(\mathrm{E}[Z^2])^2$$

$$Z = \sin(\theta)S_1 + \cos(\theta)S_2$$

と混合されている時，キュムラントの性質より

$$\kappa_4(Z) = \sin(\theta)^4\kappa_4(S_1) + \cos(\theta)^4\kappa_4(S_2)$$

が成り立つ．

Fast ICA
キュムラントを用いた方法

平均 0 の確率変数 Z の４次キュムラント

$$\kappa_4(Z) = \mathrm{E}[Z^4] - 3(\mathrm{E}[Z^2])^2$$

$$Z = \sin(\theta)S_1 + \cos(\theta)S_2$$

と混合されている時，キュムラントの性質より

$$\kappa_4(Z) = \sin(\theta)^4\kappa_4(S_1) + \cos(\theta)^4\kappa_4(S_2)$$

が成り立つ．

$\kappa_4(S_1) > \kappa_4(S_2)$ としよう．すると，

$$\sin(\theta)^4 + \cos(\theta)^4 \leq 1$$

より $\sin(\theta) = 1$ で $\kappa_4(Z)$ は最大化される．
つまり，キュムラントを最大化する方向が見つけられれば独立成分が見つかる．

w: $\|w\|=1$ なら，A が直交行列なので $\|w^\top A\|=1$ である．よって，ある θ が存在して，

$$Z_w = w^\top X = w^\top AS = \sin(\theta)S_1 + \cos(\theta)S_2.$$

なので，Z_w の 4 次キュムラントを最大化すれば S_1 が見つかる．

FastICA の手順

$k=1,\dots,p$ で以下を繰り返す:

1. $Z_w = w^\top X$ に対して，
$$\hat{w}_k = \operatorname*{argmax}_{w\in\mathbb{R}^p:\|w\|=1} \kappa_4(Z_w).$$
2. $\hat{S}_k = \hat{w}_k^\top X$
3. $X \leftarrow X - \hat{w}_k\hat{S}_k$ として 1 に戻る．

キュムラントはデータから推定する:

$$\hat{\kappa}_4(Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i^4 - 3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i^2\right)^2.$$