よって $\forall k,l \in C(i)$ は $k \leftrightarrow i$, $l \leftrightarrow i$ であり、$k \leftrightarrow l$ でもある。
よって $C(i)$ は既約。
また $j \in C(i)$ に対し、ある $k \in I$ が $j \to k$ であるとすると、$i \to j$ でもあるから
$i \to k$ である。つまり $k \in C(i)$ である。よって $C(i)$ は閉。
以上より $C(i)$ は既約かつ閉。
$R_1 = C(i)$ とおく。
$I - T - R_1 = \emptyset$ なら終る。そうでなければ $i \in I - T - R_1$ に対し、$R_2 = C(i)$
として、上の議論を繰り返せば良い。
I が有限なら各 R_k も有限なので、再帰的 //

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \\ T \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} R_1 & R_2 & R_3 & \cdots & R_N & T \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\mathbb{P}_1 & & & & & \\
 & \mathbb{P}_2 & & O & & \\
 & & \ddots & & & O \\
 & O & & & \mathbb{P}_N & \\ \hline
Q_1 & Q_2 & Q_3 & \cdots & Q_N & S
\end{array}\right]
\end{array}
, \quad
\mathbb{P}^n = \left[\begin{array}{cccc|c}
\mathbb{P}_1^n & & & & \\
 & \mathbb{P}_2^n & & & \\
 & & \ddots & & O \\
 & & & \mathbb{P}_N^n & \\ \hline
* & \cdots & & * & S^n
\end{array}\right]
$$

※ T は消滅部分 (dissipative point) と呼ぶ。
T は前の補題より $\forall i \in T$ は非再帰的
(i が再帰的なら、$i \to j$ なら $j \to i$ となり $i \notin T$ となる)

再帰性と到達時刻

Def (平均到達時間と平均再帰時間)

$m(i,j)$ = 状態 i から j への平均到達時間

$$
\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\, P(T_j = k \mid X_0 = i) = E[T_j \mid X_0 = i] & (\text{if } P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = 1) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases}
$$

$m(\underbrace{i,i}_{\text{文字同じ}})$ を平均再帰時間と呼ぶ

Def (正再帰性)

i: 再帰的のとき、

$$
\begin{cases} i \text{ が正再帰的} \overset{\text{def}}{\iff} m(i,i) < \infty \\ i \text{ が零再帰的} \iff m(i,i) = \infty \end{cases}
$$

(非再帰的なら $m(i,i) = \infty$ は自動的に成り立つ)

平均到達時間の計算法

$$
m(i,j) = P(i,j) \times 1 + \sum_{k \neq j} P(i,k) \{1 + m(k,j)\}
$$
$$
= 1 + \sum_{k \neq j} P(i,k)\, m(k,j)
$$

を各 j ごとに解く。
$i = j$ とすれば平均再帰時間も求まる。
解が一意でなければ最小の非負解 $(m(i,j))_{i,j}$ がそれになる。

7/5

Def (吸収確率)

i: 非再帰的な状態
j: 再帰的な状態 (ある再帰的な既約成分に含まれている)
i から j への吸収確率 $\overset{\text{def}}{\iff}$ i から j を含む再帰的な同値類への到達確率

分解定理より

Prop. i が再帰的かつ $i \to j$ なら $f(i,j) = 1$ である。

Proof. 先の Lem より、$f(j,i) = 1$ は示せている。また j は再帰的である。
よって $j \to i$ でもあるので、$f(i,j) = 1$ も示せる //
(再びLemより)

← このことから $\forall j' \in C(j)$ で $f(i,j) = f(i,j')$ が分かる

吸収確率の計算方法

$C(j)$: j を含む再帰的な同値類 (閉かつ既約)
T: 非再帰的な元の集合

$$
f(i,j) = \sum_{k \in C(j)} P(i,k) f(k,j) + \sum_{k \in T} P(i,k) f(k,j) + \sum_{k \in I - C(j) - T} P(i,k) f(k,j)
$$

$$
\begin{cases} k \in C(j) \Rightarrow f(k,j) = 1 \\ k \in I - C(j) - T \Rightarrow f(k,j) = 0 \quad (\text{分解定理}) \end{cases}
$$

より、$f(i,j)=\sum_{k\in C(j)} p(i,k) + \sum_{k\in T} p(i,k) f(k,j)$

⇒ この方程式を解けば良い（$(f(i,j))_{i\in T}$ について）

（解が一意でない場合は最小の非負解がそれになる。）

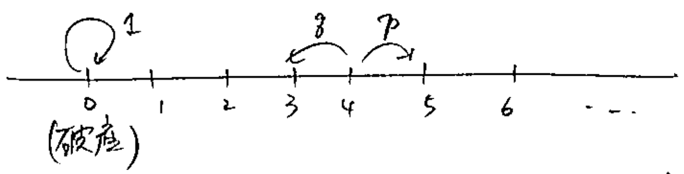
（Prop ∀$k\in \underset{\text{再帰的}}{C(j)}$ に対し、$f(i,k)=f(i,j)$，　　jを通ってkに行く。

$f(i,k)=P(T_k<\infty|X_0=i)\geq P(\text{ある}n\text{で}X_n=k|T_j<\infty)\cdot P(T_j<\infty|X_0=i)$

$=\underbrace{P(T_k<\infty|X_0=j)}_{f(j,k)=1}P(T_j<\infty|X_0=i)=f(i,j)$）

kとjを逆にすれば $f(i,j)=f(i,k)$ を得る。

Ex. ギャンブラーの破産確率



確率 p で +1 万円
〃 q で −1 万円
所持金 0 で破産

$a(0)=1$，　$a(i)$：i から始めて破産する確率（$=f(i,0)$）

方程式：$a(i)=p\,a(i+1)+q\,a(i-1)$　$(i=1,2,\dots)$
$a(0)=1$

$\Rightarrow p[a(i+1)-a(i)]=q[a(i)-a(i-1)]$

$\Rightarrow \begin{cases} a(i)=\alpha+\beta\left(\frac{q}{p}\right)^i & (p\neq q)\\ a(i)=\alpha+\beta i & (p=q=\frac12)\end{cases}$

(i) $p<q$ のとき，　$0\leq a(i)\leq 1$　($\forall i$) より　$\beta=0$
よって　$a(0)=1$ から $\alpha=1$ なので　$a(i)=1$　($\forall i$)
⟶ 必ず破産する

(ii) $p=q$ のとき　$0\leq a(i)\leq 1$ より
やはり $\beta=0$
$a(0)=1$ より $\alpha=1$ で $a(i)=1$　($\forall i$) ⟶ 必ず破産。

(iii) $p>q$ のとき
$i\to\infty$ で $a(i)\to\alpha$ であ
一方　$i=0$ で $a(0)=\alpha+\beta=1$
よって最小の非負解は $\alpha=0$，$\beta=1$ で達成される。
つまり　$a(i)=\left(\frac{q}{p}\right)^i$ ⟶ 運が良ければ破産しない

Thm（平均再帰時間の性質と正再帰性の条件）

任意の i,j に対し

$$\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n p^{(k)}(i,j)=\frac{f(i,j)}{m(j,j)}$$

← 到達確率　← 平均再帰時間

特に j が正再帰的 $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n p^{(k)}(j,j)>0$

Cor　I が既約であるとする。

(1) j が正再帰的なら　$\forall i\in I$ に対し、

$$\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{k=1}^n p^{(k)}(i,j)=\frac{1}{m(j,j)}>0$$

(2) j が零再帰的なら　$\forall i\in I$ において

$$\lim_{n\to\infty}p^{(n)}(i,j)=0$$

Proof　$Z_n=\begin{cases}1 & (X_n=j)\\ 0 & (X_n\neq j)\end{cases}$

とする。$N_j(n)=\sum_{k=1}^n Z_k$ とおくと、

$E[N_j(n)|X_0=i]=\sum_{k=1}^n E[Z_k|X_0=i]=\sum_{k=1}^n p^{(k)}(i,j)$

まず $i=j$ で考える（$X_0=i=j$）

$T_j^{(k)}$ を状態 j を k 回目に訪れた時間とする（$T_j^{(k)}=\inf\{n\geq 1\,|\,N_j(n)\geq k\}$，$\phi$ なら∞とする）

$T_j^{(0)}=0$ とする。

$t_k=T_j^{(k)}-T_j^{(k-1)}$ とおく。すると t_k は独立同一分布に従う。

よって大数の強法則より

$$\frac{T_j^{(k)}}{k}=\frac{t_1+t_2+\cdots+t_{k-1}+t_k}{k}\xrightarrow{a.s.}E[t_1]=E[T_j|X_0=j]=m(j,j)$$

また、$T_j^{(k)}$ の定義より　$T_j^{(N_j(n))}\leq n<T_j^{(N_j(n)+1)}$（これは $m(j,j)=\infty$ でも成立す）

なので

$$\frac{T_j(N_j(n))}{N_j(n)}\leq\frac{n}{N_j(n)}<\frac{T_j(N_j(n)+1)}{N_j(n)+1}\cdot\frac{N_j(n)+1}{N_j(n)}.$$

である。ここで j が再帰的であると仮定すると、$N_j(n)\to\infty$ (a.s.)

よって　$\frac{n}{N_j(n)}\longrightarrow m(j,j)$ (a.s.)（∞も成立す）

一方、j が非再帰的なら $P\left(\lim_{n\to\infty} N_j(n) < \infty \mid X_0 = j\right) = 1$ なので
$(1 - g(j,j))$

$$\frac{n}{N_j(n)} \longrightarrow \infty = m(j,j)$$

$i \neq j$ のとき、

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \underbrace{\frac{\tau_1}{k}}_{= \frac{T_j}{k}} + \frac{\tau_2 + \cdots + \tau_k}{k} \xrightarrow{(k\to\infty)} \begin{cases} m(j,j) & (\text{if } T_j < \infty) \\ \infty & (\text{if } T_j = \infty) \end{cases} \quad (a.s.)$$

以上より、いずれにしても

$$\frac{n}{N_j(n)} \longrightarrow \begin{cases} m(j,j) & (T_j < \infty) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (a.s.)$$

$$\iff \quad \frac{N_j(n)}{n} \longrightarrow \frac{1}{m(j,j)} \mathbb{1}[T_j < \infty] \quad (a.s.)$$

両辺の期待値をとれば、ルベーグの優収束定理より、

$$\frac{f(i,j)}{m(j,j)} = \frac{P(T_j < \infty \mid X_0 = i)}{m(j,j)} = E\left[\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} \,\middle|\, X_0 = i\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{N_j(n)}{n} \,\middle|\, X_0 = i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} p^{(l)}(i,j) \quad //$$

(Cor の証明は省略、特に(2))

定常分布と極限分布

Def（定常分布）

$\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots)$: I 上の分布

π が <u>定常分布</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\underline{\pi = \pi \mathbb{P}}$ $\left(\pi(j) = \sum_{i\in I} \pi(i) p(i,j) \ (\forall j)\right)$

（平衡方程式）が成り立つ

※ Markov 連鎖で更新しても分布が変わらない

Def（極限分布）

$\pi_n(j) = \sum_{i\in I} \pi_0(i) p^{(n)}(i,j)$ （π_0 は初期分布）とする。

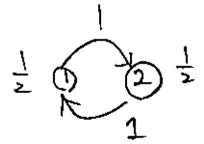
π が <u>極限分布</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ <u>任意の π_0 に対し</u>、$\lim_{n\to\infty} \pi_n(j) = \pi(j)$ $(\forall j \in I)$

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(\infty)} = (\pi^T \ \pi^T \cdots)$ ← 極限分布 という形をしてないといけない。

Note ○ 極限分布が存在すれば、それは一意的な定常分布である。
→ チェックせよ。

○ 定常分布が存在しても、極限分布が存在するとは限らない

$\pi=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ → $\pi P=\pi$ より πは定常分布



しかし、$P^{(n)}=\begin{cases} P & (n:\text{奇数}) \\ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & (n:\text{偶数})\end{cases}$ → 周期性がある
↓
極限分布は存在しない

Thm (マルコフ連鎖の定常分布)

マルコフ連鎖は既約であるとする
すると、以下は同値

((1),(2)より正再帰性はクラスの性質)

(1) ある $j\in I$ が正再帰的
(2) 全ての $j\in I$ が正再帰的
(3) 定常分布が(ただ一つ)存在する。

その定常分布は、$\pi(j) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}p^{(l)}(j,j)=\frac{1}{m(j,j)}$ である。

Lem 正再帰的なjに対し、

$$\mu(i)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X_n=i,\ T_j>n\mid X_0=j)$$

← jを出発して再びjに戻るまでにiを経由する確率
($T_j<\infty$ a.s. に注意)

とすると、$\pi(i)=\dfrac{\mu(i)}{m(j,j)}$ は定常分布になる。

(jを出発して戻るまでに、どれくらい$i\in I$に滞在していたか)

Proof まず、$\mu(j):=P(X_0=j,\ T_j>0\mid X_0=j)=1$ である。

また、
$$\sum_{i\in I}\mu(i)=\sum_{n=0}^{\infty}P(T_j>n\mid X_0=j)=\sum_{n=1}^{\infty}P(T_j\geq n\mid X_0=j)=E[T_j\mid X_0=j]=m(j,j)$$

なので、πは確率分布になる。

$\bar{P}^{(l)}(j,i)=P(X_l=i,\ T_j>l\mid X_0=j)$ とおくと、

$$\sum_i\mu(i)p(i,k)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_i\bar{P}^{(l)}(j,i)p(i,k)$$

である。右辺$=\mu(k)$なら良い

(i) ($k\neq j$ のとき)

$$\begin{aligned}\sum_i\bar{P}^{(l)}(j,i)p(i,k)&=\sum_i P(X_l=i,\ T_j>l,\ X_{l+1}=k\mid X_0=j)\\&=P(T_j>l,\ X_{l+1}=k\mid X_0=j)\\&=P(T_j>l+1,\ X_{l+1}=k\mid X_0=j)\quad(\because j\neq k)\\&=\bar{P}^{(l+1)}(j,k)\end{aligned}$$

ここで、$\sum_{l=0}^{\infty}(\text{右辺})=\mu(k)$ はすぐわかる。($j\neq k$に注意)

(ii) ($k=j$ のとき)

上と同様に

$$\begin{aligned}\sum_i\bar{P}^{(l)}(j,i)p(i,k)&=\sum_i P(X_l=i,\ T_j>l,\ X_{l+1}=\overset{k}{\overset{\shortparallel}{j}}\mid X_0=j)\\&=P(T_j=l+1\mid X_0=j)\end{aligned}$$

このとき、$\sum_{l=0}^{\infty}(\text{右辺})=P(T_j<\infty\mid X_0=j)=1=\mu(j)$ //

Proof of Thm

(2)→(1) は明らか。

(1)→(2) を示す。
$i\in I$ を任意に取る。
既約性より、$i\leftrightarrow j$ である。よって $\exists k,m$ で $p^{(k)}(i,j)>0$, $p^{(m)}(j,i)>0$ より

$$\frac{1}{m(i,i)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}p^{(l)}(i,i)\geq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+m+k}\sum_{l=1}^{n}p^{(k)}(i,j)\,p^{(l)}(j,j)\underbrace{p^{(m)}(j,i)}_{>0}$$

$$=\underbrace{p^{(k)}(i,j)}_{>0}\underbrace{p^{(m)}(j,i)}_{>0}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+m+k}\sum_{l=1}^{n}p^{(l)}(j,j)}_{\longrightarrow\frac{1}{m(j,j)}}>0$$

($\because$ jは正再帰的)

(2)→(3) どれか正再帰的なら、前のLemよりある定常分布が存在する
(一意性は後でやる)

(3) → (2)

既約性より 定常分布 π に対し $\pi(j)>0$ をみたす j について、

$\forall i$ において $j \to i$ なので、ある $n \geq 1$ で $p^{(n)}(j,i)>0$ とできる。

よって $\pi(i) = \sum_{j'} \pi(j') p^{(n)}(j',i) \geq \pi(j) p^{(n)}(j,i) > 0$ である。

ここで $\forall j \in I$ において

$$\pi(j) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{k} \pi(k) p^{(\ell)}(k,j)}_{= \pi(j)} \Big)$$

$$= \sum_{k \in I} \pi(k) \Big(\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} p^{(\ell)}(k,j) \Big)$$

$$\xrightarrow[\text{優収束定理}]{n \to \infty} \sum_{k \in I} \pi(k) \cdot \frac{1}{m(j,j)} = \frac{1}{m(j,j)}$$ より（左辺は n によらないことを注意）

$\frac{1}{m(j,j)} = \pi(j) > 0$ で $m(j,j) < \infty$。つまり j は正再帰的。

（一意性）上の議論で $\pi(j) = \frac{1}{m(j,j)}$ が言えてしまっているので、一意性も言えている。 //

Def（周期性）

i の周期 $d(i)$：$p^{(n)}(i,i)>0$ なる $n \geq 1$ の最大公約数

Lem

$i \leftrightarrow j$ なら $d(i) = d(j)$ （周期はクラスの性質）

Thm（極限分布の存在条件）

マルコフ連鎖が既約であるとする。

連鎖が $\left|\begin{array}{l}\text{正再帰的}\\ \text{非周期的}\end{array}\right.$ $\Longleftrightarrow$ 極限分布が存在

Note この極限分布は定常分布で $\pi(j) = \frac{1}{m(j,j)}$ で与えられる。

Lem 既約で正再帰的なマルコフ連鎖が非周期的なら

$\forall i,j \in I$ で $\lim_{n \to \infty} p^{(n)}(i,j) = \frac{1}{m(j,j)} = \pi(j)$ （定常分布）

周期的 $(d(i) \geq 2)$ なら $p^{(n)}(i,j)$ は収束しない

Proof（カップリング法による。web-補足資料）

Proof of Thm

($\Rightarrow$) Lem による

($\Leftarrow$) 極限分布が存在すれば、定常分布が存在するので、正再帰的。

また、先の Lem より 周期的なら $p^{(n)}(i,j)$ は収束せず極限分布が存在しなくなるので、非周期的でなければいけない。 //

Thm（大数の強法則）

既約かつ定常分布 π が存在するとき、$f: I \to \mathbb{R}$ が $\sum_{i \in I} |f(i)| \pi(i) < \infty$

なら

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \longrightarrow E_\pi[f(X)] \quad (a.s.)$$

↑ マルコフ連鎖

//