確率数理工学4

期待値と特性関数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間

この空間上の r.v. X の期待値を定義したい.

F：X の分布関数.

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (可測)

F が絶対連続か離散なら $\varphi(X)$ の期待値は

φ, f が連続ならリーマン積分で良い.

$$E[\varphi(X)] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx & (\text{絶対連続}, f \text{は p.d.f.}) \\ \displaystyle\sum_k \varphi(x_k)\, P(X = x_k) & (\text{離散}) \end{cases}$$

で与えられる. これを

- 任意の分布へ拡張したい
- 連続・離散といった区別を気にしたくない
- $\mathbb{R}^d$ 以外の空間上でも積分を定義したい.

そこで, 以下のように積分を定義する.

($\varphi(X(\omega))$ も r.v. なので, ある r.v. X の期待値を定義すれば十分)

- $E[X] = \int X(\omega)\, dP(\omega)$ の定義

$\int X(\omega)\, P(d\omega)$, $\int X\, dP$, $\int X\, dF$ 等とも書く.

($dF = \frac{dF}{dx} \cdot dx = f(x) \cdot dx$ と解釈すれば, $\int x\, dF$ の記法も納得できるであろう.)

注: 今, 我々ができることは和 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \cdots\right)$ をとることだけである.

いかにして, この和の極限で積分を定義すべきか?

↳ 次ページ

(1) $A\in\mathcal{F}$ に対し、A の定義関数

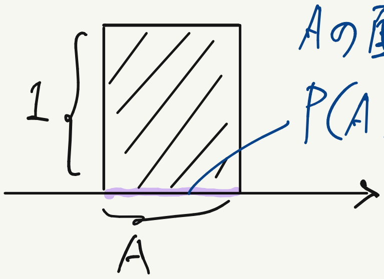
$$X(\omega)=\mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega\in A)\\ 0 & (\omega\notin A)\end{cases}$$

のとき、

$$E[X]:=P(A)$$

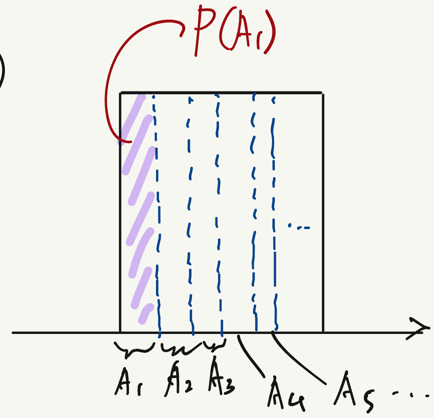
とする。

[$A\in\mathcal{F}$ だから $\{\omega \mid X(\omega)\leqq x\}=\begin{cases}A & (x\geqq 1)\\ \phi & (x<1)\end{cases}$ より X は可測関数]



Aの面積: $P(A)$ ← $A\in\mathcal{F}$ より $P(A)$ は well-defined

注



$$X(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{A_k}(\omega)$$

$$\Rightarrow E[X]=P(A)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\quad(\sigma\text{-加法性})$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}E[\mathbb{1}_{A_k}]$$

矛盾しない

$\Longrightarrow$ Xの表現のしかたによらない

別の分割 $X=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{1}_{B_k}$ としても

$$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}E[\mathbb{1}_{A_k}]=\sum_{k=1}^{\infty}E[\mathbb{1}_{B_k}]$$

---

(2) X が非負の単関数のとき、つまり ← これもまた可測関数

$$X(\omega)=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{A_i}(\omega)\qquad(\text{有限和})$$

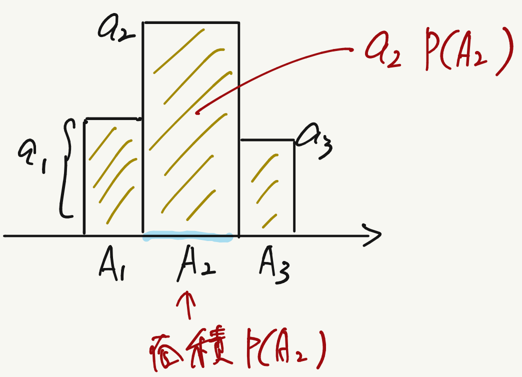
ただし、$a_i\in\mathbb{R}$, $A_i\in\mathcal{F}$, $(A_i)_{i=1}^{n}$ は互いに素とするとき、

$$E[X]:=\sum_{i=1}^{n}a_iP(A_i)$$

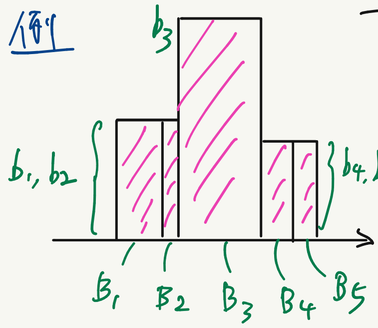
とする。 ((1) での注のように、これは単関数の表現のしかたによらない。)

$X=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{A_i}=\sum_{j=1}^{m}b_j\mathbb{1}_{B_j}$ のとき $E[X]=\sum_{j=1}^{m}b_jP(B_j)$

→ 有限加法性を使う。(演習問題)



例



$$X(\omega)=\sum_{i=1}^{3}a_i\mathbb{1}_{A_i}(\omega)$$
$$=\sum_{j=1}^{5}b_j\mathbb{1}_{B_j}(\omega)$$

$$E[X]=\sum_{j=1}^{5}b_jP(B_j)\ \text{である。}$$

(3) Xが非負の確率変数の時

単関数の単調列 $X_1(\omega) \leqq X_2(\omega) \leqq \cdots$ が存在して、

$X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$ ($X_n \nearrow X$ と書く)

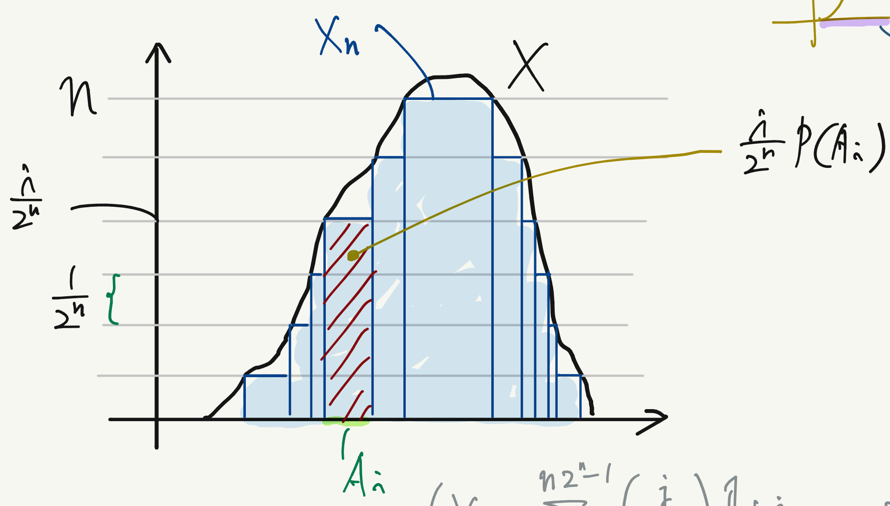
とできることが知られている。

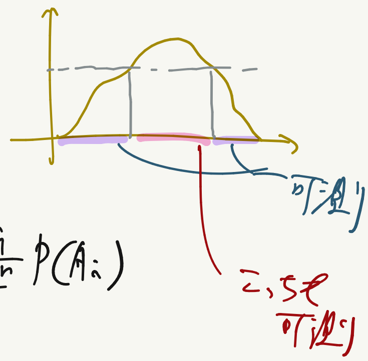
※ Xの可測性より こののX_nは可測 ($\{\omega \mid X(\omega) \leqq \frac{i}{2^n}\}$ は可測)

たとえば

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i}{2^n} & \left(\frac{i}{2^n} \leqq X(\omega) < \frac{i+1}{2^n},\ i=0,\cdots,n2^n-1\right) \\ n & (X(\omega) \geqq n) \end{cases}$$

とすれば良い。





$$\left(X_n = \sum_{j=0}^{n2^n-1}\left(\frac{j}{2^n}\right)\underbrace{1\!\!1_{\{\frac{i}{2^n}\leqq X<\frac{i+1}{2^n}\}}}_{可測} + n\underbrace{1\!\!1_{\{X\geqq n\}}}_{可測}\right)$$

$$\boxed{E[X] := \lim_{n\to\infty} E[X_n]}$$

と定義する。これは単関数の取り方によらないことが知られている。

(5) 非負とは限らないXの時

$X_+ = X \cdot 1\!\!1_{\{X\geqq 0\}}$, $X_- = |X|\, 1\!\!1_{\{X<0\}}$ とすれば良い。

$X = X_+ - X_-$ (X_+, X_- はともに非負)

と分解して

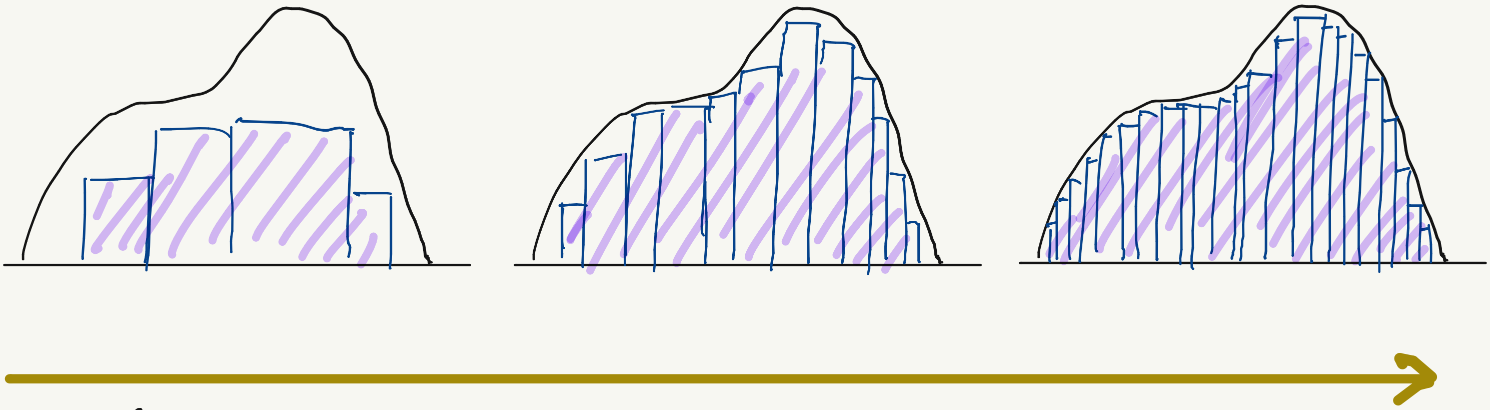
$$\boxed{E[X] = E[X_+] - E[X_-]}$$

とする。

$E[X_+], E[X_-] < \infty$ のとき、可積分という。

※：積分の定義において $\Omega = \mathbb{R}^d$ という仮定は使ってない。任意の空間で定義できる。

イメージ



単関数で領域を下から埋めてゆく

Xが単関数の列の極限で書けるかという所で

Xの可測性を用いている.

- Xの平均値 : $\varphi(x)=x$, $\mu \overset{\text{def}}{=} E[X]$
- Xのk次モーメント : $\varphi(x)=x^k$, $\mu_k \overset{\text{def}}{=} E[X^k]$
- 平均値まわりのk次モーメント : $\varphi(x)=(x-\mu)^k$, $\nu_k \overset{\text{def}}{=} E[(X-\mu)^k]$ ニューケー
- 分散 : $\varphi(x)=(x-\mu)^2$, $Var[X] \overset{\text{def}}{=} E[(X-\mu)^2]$

$$
\begin{aligned}
&= E[X^2-2X\mu+\mu^2] \\
&= E[X^2]-E[X]^2 \\
&(=\nu_2)
\end{aligned}
$$

Cor (期待値の性質)

(1) $Y=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$ に対し、

$$E[Y]=\sum_{k=1}^{n} a_k E[X_k] \quad (\text{線形性})$$

(2) $X \leqq Y$ (a.s.) なら

a.s. は almost surely の意
$P(X \leqq Y)=1$ ということ.

$$E[X] \leqq E[Y] \quad (\text{単調性})$$

(3) - $X \geqq 0$ (a.s.) のとき、

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{[0,\infty)} (1-F(x))\,dx \\
&= \int_{[0,\infty)} P(X>x)\,dx
\end{aligned}
$$

- $X \geqq 0$ (a.s.), $\alpha>0$ に対し、

$$E[X^\alpha]=\alpha\int_{[0,\infty)} x^{\alpha-1}P(X>x)\,dx$$

$(\because)$

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{[0,\infty)} x\,dF(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^{\cancel{x}\,\infty} \mathbb{1}[t<x]\,dt\,dF(x) \\
&= \int_0^\infty \int_{\cancel{t}\,0}^\infty \mathbb{1}[t<x]\,dF(x)\,dt \quad (\because \text{Fubini}) \\
&= \int_0^\infty P(t<X)\,dt
\end{aligned}
$$

非負被積分関数なら順序交換可能

//

(2つめも同様)

(4) (単調収束定理) (証明は後のページと演習問題で)

$X_n \nearrow X$ かつ $0 \le X_n \le X$ (a.s.) なら、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

(∞も許す。)

⇐ X_n, X は単関数とは限らない一般の確率変数

(5) (Fatouの補題)

$X_n \ge 0$ (a.s.) なら、

$$E\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \le \liminf_{n\to\infty} E[X_n]$$

(∞も許す)

(6) (優収束定理)

$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ ($\forall \omega \in \Omega$) でかつ

ある可積分な Z に対して $|X_n| \le Z$ (a.s.) が成り立つ時、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

//

これがないとうまくいかない例

※優収束定理の反例

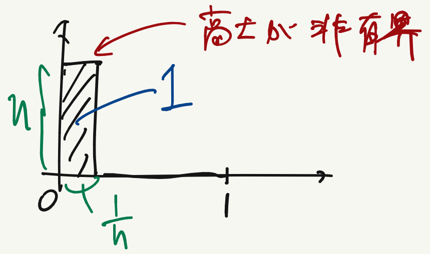
$\Omega = \cancel{[}(0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\cancel{[}(0,1])$, P: 一様分布

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & (0 < \omega \le \frac{1}{n}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases},$$

$X_n(\omega) \to X(\omega) = 0$ ($\forall \omega \in \Omega$)

しかし、$E[X_n] = 1$, $E[X] = 0$ で $\lim E[X_n] \ne E[X]$.

これは、ある Z で $|X_n| \le Z$ とできないからである。



//

(7) X, Y が独立 ($X \perp\!\!\!\perp Y$) $\Rightarrow$ $E[XY] = E[X]E[Y]$

(X, Y が単関数ならすぐ確かめられる)

Lem (分散の性質)

(1) X: r.v. に対し $Y = aX + b$ とおくと
$$V_{ar}[Y] = a^2 V_{ar}[X]$$

(2) X_1, X_2: r.v., $\mu_1 = E[X_1]$, $\mu_2 = E[X_2]$ なら
$$V_{ar}[X_1 + X_2] = V_{ar}[X_1] + V_{ar}[X_2] + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$$

(3) 互いに無相関な $X_1, \ldots, X_n$ に対し
$$V_{ar}[X_1 + \cdots + X_n] = V_{ar}[X_1] + V_{ar}[X_2] + \cdots + V_{ar}[X_n]$$
//

(2)のみ示す:
$$\begin{aligned} V_{ar}[X_1 + X_2] &= E[(X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2))^2] \\ &= E[(X_1 - \mu_1)^2] + E[(X_2 - \mu_2)^2] \\ &\quad + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] \end{aligned}$$
//

- $E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$: 共分散 (Covariance)
  $Cov(X_1, X_2)$ と書く.
- $R(X_1, X_2) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V_{ar}[X_1] V_{ar}[X_2]}}$: 相関係数 (Correlation) $(-1 \leq R(X_1, X_2) \leq 1)$ ←ある

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ (独立) $\Longrightarrow$ $E[X_1 X_2] = E[X_1] E[X_2]$ が成り立つ
特に,
$Cov(X_1, X_2) = 0$ (逆は成り立たない)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V_{ar}[X_1] & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_1, X_2) & V_{ar}[X_2] \end{pmatrix}$$: 分散共分散行列

※無相関: $Cov(X_1, X_2) = 0$

Ex. (二項分布の期待値と分散)

p.m.f. $f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \cancel{x} \frac{n!}{\cancel{x!}(n-x)!} \theta \cdot \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x}$$

$n! = n\cdot(n-1)!$

$(x-1)!$

$$= n\theta \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x}$$

$$= n\theta \underbrace{\sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{n-x}}_{=1} = n\theta$$

$Var[X] = n\theta(1-\theta)$ ← チェックせよ.

一方. $X_i = \begin{cases} 1 & (i\text{回目のコインが表}) \\ 0 & (i\text{回目のコインが裏}) \end{cases}$

$(i.i.d.)$ independent and identically distributed

$$\begin{pmatrix} P(X_i=1)=\theta \\ P(X_i=0)=1-\theta \end{pmatrix}$$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ と取れば.

Xは2項分布に従う

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \theta = n\theta$$

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \theta\cdot(1-\theta)^2 + (1-\theta)\cdot\theta^2$$

← X_iらは独立

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta(1-\theta) = n\theta(1-\theta)$$

$\Longrightarrow$ 上の計算と一致

積分が well-defined であることの証明

つまり，単関数列 X_n, Y_n がともに $X_n \nearrow X$, $Y_n \nearrow X$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \lim_{n\to\infty} E[Y_n]$$

を示す．さもなくば，$E[X]$ が単関数の取り方に依存し，well-defined でなくなる．

Lem

単関数 X, Y に対し，（演習問題）

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y] \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Lem

単関数列 X_n，単関数 X に対し，$X_n \nearrow X$ なら

$$\lim_n E[X_n] = E[X]$$

証明

$E[X] - E[X_n] = E[X - X_n]$ より，

$\lim_{n\to\infty} E[X - X_n] = 0$ を示せば良い．

言いかえれば，非負の単関数列 X_n が $X_n \searrow 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = 0 \qquad (X_n \leftarrow X - X_n \text{ と代入})$$

を示せば良い．

今 $X_1(\omega) \geqq X_2(\omega) \geqq \cdots \geqq 0$ かつ X_1 が単関数なので，

$$K = \sup_{\omega\in\Omega} X_1(\omega)$$

とすれば $K < \infty$ かつ $\forall \omega \in \Omega, \forall n$ で $0 \leqq X_n(\omega) \leqq K$ である．

特に $0 \leqq X_n = X_n \mathbb{1}\{X_n > \varepsilon\} + X_n \mathbb{1}\{X_n \leqq \varepsilon\}$ （$\varepsilon > 0$ は任意）

$$\leqq K \mathbb{1}\{X_n > \varepsilon\} + \varepsilon \mathbb{1}\{X_n \leqq \varepsilon\}$$ （← これも単関数）

$|X_n| \leqq K$ より

両辺期待値をとって，

$$0 \leqq E[X_n] \leqq K P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon \underbrace{P(X_n \leqq \varepsilon)}_{\leqq 1}$$

$$\leqq K P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon$$

単調性

ここで $X_n \searrow 0$ より $A_n = \{X_n > \varepsilon\}$ とおくと、

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$ である。 ← チェックせよ

よって確率の単調性より

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

なので、

$$\limsup_{n\to\infty} E[X_n] \leqq \varepsilon$$

（∵前ページで $E[X_n] \leqq k\underbrace{P(X_n > \varepsilon)}_{n\to\infty\ \to\ 0} + \varepsilon$ を示している）

$\varepsilon > 0$ は任意なので

$$\lim E[X_n] = 0$$

である。

$\lim E[X_n] = \lim E[Y_n]$ の証明

- $\lim E[X_n] \leqq \lim E[Y_n]$ が示せれば、X_n と Y_n の対称性より $\lim E[X_n] = \lim E[Y_n]$ を得る。

今 n を固定して、

$$Z_{n,m}(\omega) = \min\left(X_n(\omega), Y_m(\omega)\right)$$

とおく。これは単関数である。

当然 $\quad Z_{n,m} \leqq Y_m \quad (a.s.)$ である。

また、$\lim_m Y_m(\omega) = X(\omega) \geqq X_n(\omega) \quad (\forall\omega)$ より

$$Z_{n,m} \nearrow X_n \quad (m\to\infty)$$

でもある。よって先のLemmaより

$$E[X_n] = \lim_{m\to\infty} E[Z_{n,m}] \leqq \lim_{m\to\infty} E[Y_m].$$

n は任意なので、$\lim_{n\to\infty} E[X_n] \leqq \lim_{m\to\infty} E[Y_m]$.

単調収束定理の証明（参考）

各X_nごとに単関数列$Y_m^{(n)}$が存在して、 ←積分の定義より

$$E[X_n] = \lim_{m\to\infty} E[Y_m^{(n)}], \quad Y_m^{(n)} \nearrow_{m\to\infty} X_n$$

である。このとき、

$$Z_m(\omega) := \max_{n \leqq m} Y_m^{(n)}(\omega)$$

とすると、Z_mは単関数でかつ、$Z_1 \leqq Z_2 \leqq Z_3 \leqq \cdots$である。
この$(Z_m)_m$がXに漸近する単関数列であることを示す。

今、$n \leqq m$において、

$Y_m^{(n)} \leqq X_n$より　　X_mは単調列

$$Y_m^{(n)} \leqq \max_{n \leqq m} Y_m^{(n)} = Z_m \leqq \max_{n \leqq m} X_n \leqq X_m$$

つまり、

$$Y_m^{(n)} \leqq Z_m \leqq X_m \quad \cdots\cdots ①$$

である。両辺mについて$\lim$とるて、

仮定

$$X_n = \lim_{m\to\infty} Y_m^{(n)} \leqq \lim_m Z_n \leqq \lim_m X_m = X$$

であり、左辺のnの極限をとると、

$$X = \lim_n X_n \leqq \lim Z_n \leqq X$$

$E[X]$の定義!

となり、$Z_m \nearrow X$が示せた。つまり$E[X] = \lim_{m\to\infty} E[Z_m]$である。

あとは　$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \lim_{m\to\infty} E[Z_m] \; (= E[X])$が示せれば十分

①より、

$$\begin{aligned} E[X_n] &= \lim_m E[Y_m^{(n)}] \\ &\leqq \lim_m E[Z_m] \quad (\because ①) \\ &\leqq \lim_m E[X_m] \end{aligned}$$

よって、$E[X_n] \leqq \lim_m E[Z_m] \; (= E[X]) \leqq \lim_n E[X_n]$

左辺の$\lim$をとれば、$\lim_n E[X_n] \leqq E[X] \leqq \lim_n E[X_n]$

つまり、$\lim E[X_n] = E[X]$　//

演習問題

(1) $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ (ともに単関数：$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $A_i, B_j \in \mathcal{F}$, $(A_i), (B_j)$ らはそれぞれ互いに素)

のとき、$C_{ij} = A_i \cap B_j$ とおく。

X を C_{ij} を用いて単関数表示せよ。

また、$E[X] = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j P(B_j)$ を示せ。

(2) $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $Y = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ (ともに単関数)

のとき。

$X+Y$ を $C_{ij} = A_i \cap B_j$ を用いて単関数として表せ。

この表示を用いて、

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

を示せ。

(3) 単調収束定理を用いて Fatou の補題を示せ。

ヒント：$\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m \geq n} X_m(\omega)\right)$ であることから、

$Y_n(\omega) = \inf_{m \geq n} X_m(\omega)$ として、$(Y_n)_n$ に単調収束定理を適用せよ。

(4) (Fatou の補題別バージョン)

$|X_n| \leqq Z$ が可積分な Z に対して成り立つとき、

$$E[\liminf_n X_n] \leqq \liminf_n E[X_n]$$

$$E[\limsup X_n] \geqq \limsup E[X_n]$$

が成り立つことを示せ。

ヒント：$X_n + Z$ に Fatou を適用。

$-(X_n - Z)$ に Fatou を適用。

④ (4)より，優収束定理が示せる．

優収束定理の証明

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[\liminf X_n] && (\because X = \lim_n X_n \text{ より}) \\
&\leqq \liminf E[X_n] && (\because (4),\ \text{Fatouの補題}) \\
&\leqq \limsup E[X_n] \\
&\leqq E[\limsup X_n] && (\because (4)) \\
&= E[X] && (\because X = \lim X_n \text{ より})
\end{aligned}
$$

よって，$\lim E[X_n] = E[X]$ //

(5) $X_n \geqq 0$ (a.s) のとき，

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$$

を示せ．(ヒント：単調収束定理)

(6) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，$(A_n)_n$ は互いに素，で．X：可積分 のとき．

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X \mathbb{1}_{A_n}] = E\left[X \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right]$$

を示せ．(ヒント：優収束定理)

和と積分の交換

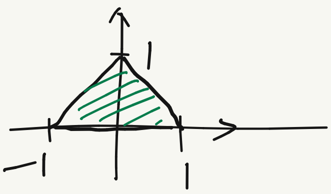
積分のσ-加法性

(7) 標準正規分布の密度関数 f が $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ をみたすことを示せ．

(8) $X \sim$ 標準正規分布 のとき．

$$Var[X] = 1$$

を示せ．



(9) (X_1, X_2) は $(-1,0), (1,0), (0,1)$ を頂点とする三角形上の一様分布に従っている．このとき $E[X_1 + X_2]$ を求めよ．

(10) 連続分布 F に対し，$E[F(X)] = \int_{\mathbb{R}} F(x)\,dF(x) = \frac{1}{2}$ を示せ．