演習解答1

(1) 基本公式

(1) ($P(\phi)=0$)

$A_1=A_2=\cdots=\phi$ とする. $A_i\cap A_j=\phi$ ($\forall i,j$) である.

$$P(\phi)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\phi)\quad(\because\ \sigma\text{-加法性})$$

である. $0\le P(\phi)\le 1$ より, $P(\phi)=0$ でなくてはいけない.

(2) ($P(A^c)=1-P(A)$)

$A_1=A$, $A_2=A^c$, $A_3=A_4=\cdots=\phi$ とする. このとき

$$\underset{\text{性質(2)}}{1=}P(\Omega)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P(A_1)+P(A_2)+\sum_{n=3}^{\infty}P(A_n)\quad(\because\ \sigma\text{-加法性})$$

$$=P(A)+P(A^c)+0\quad(\because\ (1)\text{より})$$

よって. $P(A^c)=1-P(A)$

(3) $\left(P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1-P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)\right)$

(2)より. $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1-P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\right)=1-P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)$$

(4) $A=A\cap\Omega=A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)$ である.

$(B_n)_n$ は互いに排反なので $(A\cap B_n)_n$ も互いに排反 ($\because A\cap B_n\subset B_n$).

よって. $$P(A)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B_n)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A\cap B_n)\quad(\because\ \sigma\text{-加法性})$$

(5) $B_n=A_n\setminus(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})$ とする. B_n の作り方より, $(B_n)_n$ は互いに排反. しかも. $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ かつ $B_n\subset A_n$ である. よって

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)\le\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

($P(B_n)\le P(A_n)$ を用いた. $B\subset A$ なら $A=B\cup(B\setminus A)\cup\phi\cup\phi\cdots$ より

$P(A)=P(B)+P(B\setminus A)+0+0+\cdots=P(B)+P(B\setminus A)\ge P(B)$ である.)

上の議論より, $P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$ (A_k 互いに排反な $(A_k)_k$) でもあることがわかる.

(1) 続き.

(6). $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2)$ ←互いに排反

なので.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) + P(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) + P(A_1 \cap A_2)$$

$$= P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2)$$

($\because$ $A_1 = (A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cup (A_1 \cap A_2)$ かつ $(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap (A_1 \cap A_2) = \phi$)

$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

(7) 数学的帰納法を用いる.

(6)より, $N=2$ では成り立っている. $N-1$まで成り立っているとする.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = P(A_N) + P(A_1 \cup \cdots \cup A_{N-1}) - P(A_N \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{N-1})) \quad (\because (6)より)$$

A_Nを含まない項全部

$$= P(A_N) + \sum_{m=1}^{N-1} (-1)^{m-1} \left(\sum_{n_1 < \cdots < n_m \leq N-1} P(A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_m}) \right)$$

A_Nを含む項全部

$$\underbrace{-\sum_{m=1}^{N-1} (-1)^{m-1}}_{(-1)^m} \left(\sum_{n_1 < \cdots < n_m \leq N-1} \underbrace{P((A_{n_1} \cap A_N) \cap \cdots \cap (A_{n_m} \cap A_N))}_{= P(A_N \cap A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_m})} \right)$$

$m+1$ こ の項

$$= \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_m \leq N} P(A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_m})$$

$$= \sum_{m=1}^{N} (-1)^{m-1} S_m$$

//

(2) ① なってない ($\because$ $\{1,3\} \setminus \{1\} = \{3\}$ であるが. $\{3\}$は$\mathcal{F}$に含まれない)

② なっている

③ なっている

(σ-加法族の性質から $A \subset B$ $(A, B \in \mathcal{F})$ なら $B \setminus A \in \mathcal{F}$ はすぐ導ける.)

(3) $A_n \in \mathcal{F}$より $A_n^c \in \mathcal{F}$. よって. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}$ で. $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathcal{F}$ でもある.

よって. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ である.

(4) $\mathcal{F}_1 = \{\phi, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\phi, \{2\}, \{1,3\}, \Omega\}$ とすると.

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \Omega\}$ である.

しかし. $\{3\} = \{2,3\} \setminus \{2\}$ は $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ に含まれない

(5) $\sigma([n])$を. $\{1,2,\dots,n\}$の部分集合全体から成るσ-加法族とする.

今、 $\mathcal{F}_n=\sigma([n])$とすると. $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ はσ-加法族にならない.

なぜなら. $A_k=\{2,3,\dots,k\}$ $(k\geq 2)$ は. $A_k\in\mathcal{F}_k\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ $(\forall k\geqq 2)$である.

しかし. $A:=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\{2,3,4,\dots\}$ はどのnに対しても $A\in\mathcal{F}_n$

が成り立たない. よって. $A\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ で. σ-加法性が成り立たない.

(6) $\mathcal{F}$がσ-加法族になることはすぐに確認できる.
Pが確率測度になることを示す.

(i) $\forall A\in\mathcal{F}$に対し. $P(A)=0$ 又は $P(A)=1$ より. $0\leq P(A)\leq 1$

(ii) $\Omega=\mathbb{R}$は非加算集合なので. $P(\Omega)=1$

(iii) $A_n\in\mathcal{F}$ $(\forall n)$ で. $A_n\cap A_m=\phi$ $(n\neq m)$ とする.

もし、ある A_n, A_m $(n\neq m)$ がともに非可算だとすると.

A_n^cは可算なので. $A_n^c\supset A_m$ となりえない. つまり

$A_n\cap A_m=\phi$ は成り立たない. よって. $(A_n)_n$ のうち

非可算集合は高々1つ.

(a) あるA_nが非可算集合のとき.

A_n以外の A_m $(m\neq n)$ は全て可算で. $P(A_m)=0$ である.

また. $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ はA_nを含むので非可算集合で. $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=1$.

一方で. $\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=P(A_n)+\sum_{k\neq n}P(A_k)=1$.

よって. $P(\bigcup_n A_n)=\sum_n P(A_n)$.

(b) 全てのA_nが可算集合のとき. $\bigcup_n A_n$も可算. よって.

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=0$. 一方で. $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=0$.

(7) 任意の閉集合 A に対し、A^c は開集合。よって $A^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であるが、
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は σ-加法族なので、$(A^c)^c = A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。

(8) $\forall n$ に対し、$(a, b+\frac{1}{n}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。($(a, b+\frac{1}{n})$ は開集合なので)
ここで、$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b+\frac{1}{n})$ より、$(a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ でもある。

(9) 省略(ノート3を参照)

(10) 一意に定まる。
$P(\{2\}) = P(\{1,2\}) - P(\{1\})$
$P(\{3\}) = 1 - P(\{1\}) - P(\{2\})$
によって、$P(\{1\}), P(\{2\}), P(\{3\})$ が定まる。
$\forall A \in \mathcal{F}$ に対しては $P(A) = \sum_{a \in A} P(a)$ で定まる。

(11) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}] = (0,1)$ である。
(∵) $\forall x \in (0,1)$ は、$x < 1$ なので、ある n が存在して、$x \leqq 1-\frac{1}{n}$ である。
つまり、$x \in (0, 1-\frac{1}{n}]$ である。よって、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}] \supset (0,1)$
一方、$(0, 1-\frac{1}{n}] \subset (0,1)$ ($\forall n$) なので、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}] \subset (0,1)$ でもある。
よって、$\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}] = (0,1)$
//

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1+\frac{1}{n}) = (0, 1]$.
証明は略。