演習解答4

(1) (問題修正: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j = \Omega$ とする.)

$C_{ij} = A_i \cap B_j$ とおく. $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = \Omega$ より $A_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}$, 同様に $B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}$.

さらに $(C_{ij})_{i,j}$ は互いに素.

よって $\mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{C_{ij}}$, $\mathbb{1}_{B_j} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{C_{ij}}$ とできて,

$X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{C_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{C_{ij}}$ と単関数表示できる.

(さらに、あるiについて $C_{ij} \neq \phi$ であるjに対しては $a_i = b_j$ である.)

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i P(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} P(C_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_i P\left(\bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j P(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} P(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} b_j P(B_j)
\end{aligned}
$$

(2) (問題修正: これも $\sum_i A_i = \sum_j B_j = \Omega$ とする)

このとき, (1)と同様にして

$X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \mathbb{1}_{C_{ij}}$, $Y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{C_{ij}}$ と書く.

このとき $X+Y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\mathbb{1}_{C_{ij}}$ と単関数表示できる.

$$
\begin{aligned}
\text{よって}\quad E[X+Y] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_i+b_j) P(C_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i P(C_{ij}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j P(C_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} P(C_{ij}) + \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} P(C_{ij}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j P(B_j) = E[X] + E[Y]
\end{aligned}
$$

(3), (4): ヒントの通りに考えれば示せるので省略.

(5) $X_n \geq 0$ (a.s.) より $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とおけば $Y_n \geq 0$ (a.s.) かつ

Y_n は単調列. よって単調収束定理が適用できて,

$$
\begin{aligned}
E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] &= E\left[\lim_{n\to\infty} Y_n\right] = \lim_{n\to\infty} E[Y_n] = \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} E[X_i]
\end{aligned}
$$

(6) X は可積分なので $Z = |X|$ も可積分.
また $(A_n)_n$ は互いに素なので $\mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ である.
このとき, $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X \mathbb{1}_{A_i}$ とおくと, $|Y_n| \leq Z$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = X\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_i}\right) = X \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$$ である.

よって, 優収束定理より

$$\sum_{i=1}^{\infty} E[X \mathbb{1}_{A_i}] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} E[X \mathbb{1}_{A_i}] = \lim_{n\to\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} X \mathbb{1}_{A_i}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} E[Y_n] \underset{\text{優収束}}{=} E\left[\lim_{n\to\infty} Y_n\right] = E\left[X \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right]$$

//

(7) 省略
(8) 省略

(9) $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$ (∵ 加法性)
である. X_1 の周辺分布は原点対称なので, $E[X_1] = 0$ である.
$E[X_2]$ を求める. 同時密度は $f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}$ ((x_1, x_2) が三角形に含まれるとき)
なので, 周辺密度は

$$f_2(x_2) = \int_{-(1-x_2)}^{1-x_2} \frac{1}{4}\, dx_1 \quad (0 \leq x_2 \leq 1)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - x_2)$$

である. よって, $E[X_2] = \int_0^1 x_2 f_2(x_2)\, dx_2 = \left[\frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{2}x_2^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

//

(10) 演習問題2の(1)より, $\omega \longmapsto F(X(\omega))$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従う
(つまり, $Q = (F \circ X)_{\#} P$ は $[0,1]$ 上の一様分布である.)

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\, dF(x) = E[F(X)] = \int_0^{\infty} P(F(X) \geq y)\, dy$$

$$= \int_0^1 (1 - y)\, dy = \left[y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

//