

# 確率数理工学12

## 再帰性と到達時刻

Def (平均到達時間と平均再帰時間)

$m(i, j)$  = 状態  $i$  から  $j$  への平均到達時間

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k P(T_j = k | X_0 = i) = E[T_j | X_0 = i] \\ \infty \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(if } P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1) \\ \text{(otherwise)} \end{array}$$

( $T_j = \inf \{n \geq 1 | X_n = j\}$ )

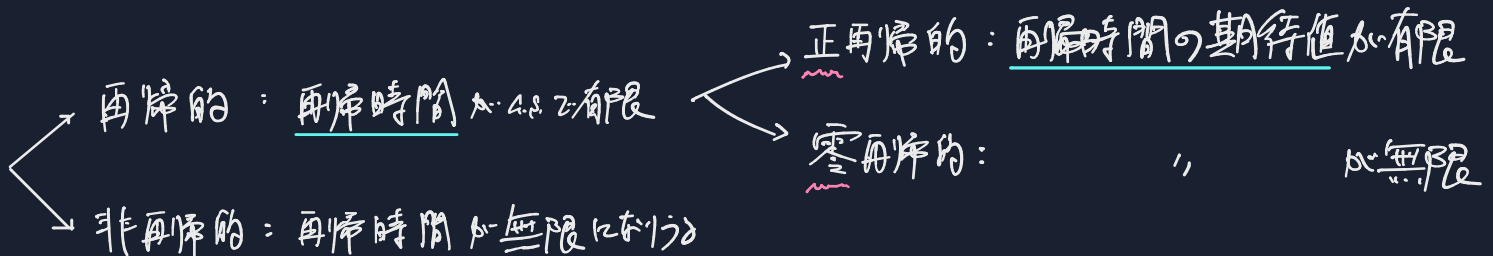
$m(i, i)$  を 平均再帰時間 と呼ぶ  
↑  
同じ

Def (正再帰性)

$i$ : 再帰的なとき

$$\begin{cases} i \text{ が正再帰的} \iff m(i, i) < \infty \\ i \text{ が零再帰的} \iff m(i, i) = \infty \end{cases}$$

(非再帰的な自由の  $i$  には  $m(i, i) = \infty$  である)



# 平均到達時間の計算法

$$m(i, j) = p(i, j) \times 1 + \sum_{k \neq j} p(i, k) \left\{ 1 + m(k, j) \right\}$$

$\uparrow$   
 $i \rightarrow j$  1 step 到達  
 $\uparrow$   
 $i$  から  $k$  に行ったら  
 $j$  に到達するのに必要な step 数

次の時刻に  $k$  に到達  
 その後  $k$  から  $j$  に到達

$$\Rightarrow m(i, j) = 1 + \sum_{k \neq j} p(i, k) m(k, j)$$

$(\because p(i, j) + \sum_{k \neq j} p(i, k) = \sum_{k \in I} p(i, k) = 1)$

この方程式を各  $j$  ごとに解く。

$i = j$  とおけば平均再帰時間も求まる。

解が一意的なけりば最小の非負解  $(m(i, j))$  が与えられる。

(\*)

(証明は与えないうが、補足資料の吸収確率の計算と同様に示せる。)

## Def (吸収確率)

$i$ : 非再帰的な状態

$j$ : 再帰的な状態  $\leftarrow$  (分解定理判. ある再帰的な既約成分に含まれる)

$i$  から  $j$  の 吸収確率  $\iff$   $i$  から  $j$  を含む再帰的な同値類への到達確率

Prop  $i$  が再帰的なら  $i \rightarrow j$  なら  $f(i, j) = 1$  である。

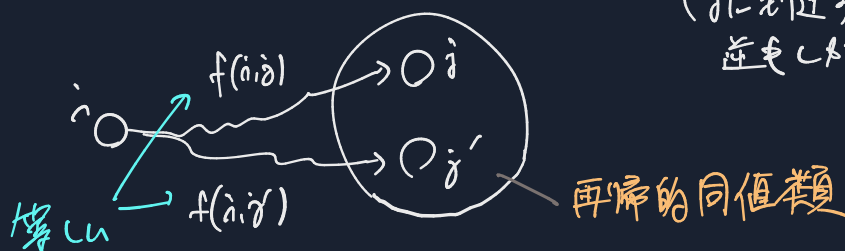
Proof 前回の講義資料判.  $f(j, i) = 1$  である再帰的になることを示せばよい。

よして  $j \rightarrow i$  かつ  $j$  が再帰的なので、再び同様の議論(25),  $f(i, j) = 1$  である。

$\Rightarrow$  このことから  $\forall j' \in C(j)$  として  $f(i, j) = f(i, j')$  がわかる。

( $j$  に到達するには必ず  $j'$  にも到達せよし、逆も亦然り)

これは一対一に証明



(番号)  $\forall k \in C(i) \Rightarrow \cup 2, f(i, k) = f(i, j) \Rightarrow T_i \leq T_k$  の証明

$$f(i, k) = P(T_k < \infty | X_0 = i) \geq P(T_j \leq T_k < \infty | T_j < \infty) P(T_j < \infty | X_0 = i)$$

↑  $j \in C(i)$  から  $k$  に到達する

$$= P(T_k < \infty | X_0 = j) P(T_j < \infty | X_0 = i) = f(i, j)$$

$$f(i, k) = 1$$

$k \in j$  の逆は成り立たない、 $f(i, k) \leq f(j, k)$  も得るから、 $f(i, k) = f(j, k)$

## 吸収確率の計算方法

$C(i)$ :  $i$  を含む再帰的状態値類 (閉ループ既約)

$T$ : 非再帰的状態の集合

$$f(i, j) = \sum_{k \in C(i)} P(i, k) f(k, j) + \sum_{k \in T} P(i, k) f(k, j) + \sum_{k \in I - C(i) - T} P(i, k) f(k, j)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \in C(i) & \Rightarrow f(k, j) = 1 \\ k \in I - C(i) - T & \Rightarrow f(k, j) = 0 \end{cases} \quad (\text{分解定理})$$

よって:

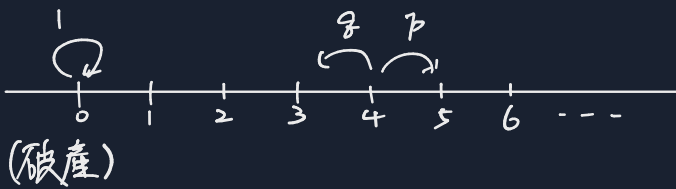
$$f(i, j) = \sum_{k \in C(i)} P(i, k) + \sum_{k \in T} P(i, k) f(k, j)$$

$\Rightarrow$  この方程式を解けばよい。

( $\forall j \in C(i)$  かつ  $\cup 2$  かつ  $f(i, j) = f(i, j)$  かつ)

解が一意的な場合は最小の非負解が与えられる。

Ex. ギャンブラーの破産確率



確率  $p$  で  $+1$  万円  
 $q$  で  $-1$  万円  
 所持金  $0$  で破産

資産  $n$  から始めて破産する確率を求めよ

$a(0) = 1$ ,  $a(n)$ :  $n$  から始めて破産する確率 ( $= f(n, 0)$ )

方程式:  $a(n) = p a(n+1) + q a(n-1)$  ( $n=1, 2, \dots$ )

$a(0) = 1$

$\Rightarrow p [a(n+1) - a(n)] = q [a(n) - a(n-1)]$

$\Rightarrow \begin{cases} a(n) = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^n & (p \neq q) \\ a(n) = \alpha + \beta n & (p = q = \frac{1}{2}) \end{cases}$

$\hookrightarrow$  ある  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  を用いて書ける.

(i)  $p < q$  のとき  $0 \leq a(n) \leq 1$  ( $\forall n$ ) より  $\beta = 0$  (正負不明  $a(n) \rightarrow \infty$  or  $-\infty$ )  
 $\hookrightarrow a(0) = 1$  から  $\alpha = 1$  なるので  $a(n) = 1$  ( $\forall n$ )  
 $\rightarrow$  必ず破産する

(ii)  $p = q$  のとき  $0 \leq a(n) \leq 1$  より  
 かつ  $\beta = 0$   
 $a(0) = 1$  より  $\alpha = 1$  して  $a(n) = 1$  ( $\forall n$ )  
 $\rightarrow$  必ず破産する.

(iii)  $p > q$  のとき  $n \rightarrow \infty$  して  $a(n) \rightarrow \alpha$  である.  
 一方、 $n=0$  して  $a(0) = \alpha + \beta = 1$   
 $\hookrightarrow$  最小の非負解は  $\alpha = 0, \beta = 1$  達成される.  
 かつ、  
 $a(n) = \left(\frac{q}{p}\right)^n$   
 $\rightarrow$  運が良ければ破産しない

# Thm (平均再帰時間の性質と正再帰性の条件)

任意の  $i, j$  に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(i, j) = \frac{f(i, j)}{m(i, j)}$$

← 到達確率  
← 平均再帰時間

特に  $j$  が正再帰的  $\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(j, j) > 0$   
 $\forall m(i, j) < \infty$

(証明はC.R.T)

直感的な説明:  $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(i, j)$  は " $i$  から出発して  $n$  ステップ後  $j$  に平均的に  $j$  に滞在した時間の割合" である。  
 $\rightarrow$  尤も、 $i$  から  $j$  に到達する確率は  $f(i, j)$ 、 $j$  に到達したら、 $m(i, j)$  時間後  $j$  に戻るので、  
 平均的に  $\frac{1}{m(i, j)}$  の割合で  $j$  に滞在したことになる。 //

Cor  $I$  が既約であるとする。

(i)  $j$  が正再帰的なら  $\forall i \in I$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(i, j) = \frac{1}{m(i, j)} > 0$$

(ii)  $j$  が零再帰的なら、 $\forall i \in I$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i, j) = 0$$

( $\because$  (i):  $I$  が既約である。  $j$  が正再帰的なら、 $f(i, j) = 1$  であるから  $i$  から  $j$  に必ず到達する。  
 $\therefore$  (i) は Thm 1) 示せる  
 (ii) は自明である。証明は省略。)

(Thmの proof)

$$Z_n = \begin{cases} 1 & (X_n = j) \\ 0 & (X_n \neq j) \end{cases} \quad \text{と} \quad N_j(n) = \sum_{k=1}^n Z_k \quad \text{と} \quad \text{する。}$$

時刻  $n$  まで  $j$  に  $n$  回滞在回数

$$E[N_j(n) | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n E[Z_k | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n p^{(k)}(i, j) \quad \text{に} \quad \text{注意} \quad \text{する。}$$

(i) 尤も  $i = j$  を考える ( $X_0 = i = j$ )

$T_j^{(k)}$  を状態  $j$  を  $k$  回訪ねるに要する時間とする ( $T_j^{(k)} = \inf \{n \geq 1 \mid N_j(n) \geq k\}$ )

$T_j^{(0)} = 0$  とする。

$\therefore$   $i$  から  $n$  回訪ねるには  $\infty$  とする

$t_k = T_j^{(k)} - T_j^{(k-1)}$  とおす。すると、 $t_k$  は独立同分布に従う。(Markov性)  
 よって、大数の強法則より

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} + t_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a.s.} E[t_1] = E[T_j | X_0 = j] = m(i, j)$$

また、 $T_j^{(k)}$  の定義より  $T_j(N_j(n)) \leq n < T_j(N_j(n)+1)$

$\left( \begin{array}{l} \text{これは} \\ m(i, j) = \infty \text{ の} \\ \text{中では} \end{array} \right)$

よって、

$$\frac{T_j(N_j(n))}{N_j(n)} \leq \frac{n}{N_j(n)} < \frac{T_j(N_j(n)+1)}{N_j(n)+1} \cdot \frac{N_j(n)+1}{N_j(n)}$$

よって、

$\left( \begin{array}{l} \text{前問資料より} \\ m(i, j) = 1 \end{array} \right)$

(a)  $\Rightarrow$   $j$  が再帰的であるとき、仮定より  $N_j(n) \rightarrow \infty$  (a.s.)

よって、

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow m(i, j) \quad (a.s.)$$

(b) 一方、 $j$  が非再帰的ならば  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} N_j(n) < \infty | X_0 = j) = 1$  となる。

$\left( \begin{array}{l} \text{1-9(i, j)} \end{array} \right)$

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow \infty \quad (a.s.)$$

よって、一方、 $j$  が非再帰的ならば  $m(i, j) = \infty$  である。

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow m(i, j) \quad (a.s.) \text{ を得る。}$$

(ii)  $i \neq j$  のとき、

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \underbrace{\frac{t_1}{k}}_{\frac{T_j}{k}} + \frac{t_2 + \dots + t_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a.s.} \begin{cases} m(i, j) & (T_j < \infty) \\ \infty & (T_j = \infty) \end{cases}$$

(i), (ii) より、よって、

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow \begin{cases} m(i, j) & (\text{if } T_j < \infty) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (a.s.)$$

$$\Rightarrow \frac{N_j(n)}{n} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{m(i, j)} \mathbb{1}[T_j < \infty] \quad (a.s.)$$

両辺の期待値をとれば. ル1=7の優収束定理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p^{(n)}(i, j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{N_j^{(n)}}{n} \mid X_0 = i \right] \\ &= E \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_j^{(n)}}{n} \mid X_0 = i \right] \\ &= E \left[ \frac{1}{m(i, j)} \mathbb{1}_{[T_j < \infty]} \mid X_0 = i \right] \\ &= \frac{1}{m(i, j)} \cdot P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \frac{f(i, j)}{m(i, j)} \quad // \end{aligned}$$

## 定常分布と極限分布

Def (定常分布)

$\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots)$  :  $I$  上の分布

$\pi$  が定常分布  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi = \pi P$  ( $\pi(i) = \sum_{j \in I} \pi(j) P(j, i)$ )  
: 平衡方程式

\* Markov 連鎖で更新しても分布は変わらない.

(定常分布が存在するとき限定的)

Def (極限分布)

$\pi_n(j) := \sum_{i \in I} \pi_0(i) P^{(n)}(i, j)$  ( $\pi_0$  は初期分布)

$\pi$  が極限分布  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  任意の  $\pi_0$  に対し.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(j) = \pi(j) \quad (\forall j \in I)$$

(連続分布の場合の一般化)

(極限分布が存在するとき限定的)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \end{pmatrix}$$

極限分布


という形式を  $\pi$  と表すことができる.

$\pi(j) = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$   
と表すこともできる.

Note

- 極限分布が存在すれば、これは一意の定常分布である。  
→ チェックせよ。
- 定常分布が存在して、極限分布が存在すれば限らない。

反例:  $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi P = \pi$ 、 $\pi$ は定常分布

①  ② かつ、 $P^{(n)} = \begin{cases} P & (n: \text{奇数}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$

→ 周期性がある

$\pi_0 = (1 \ 0)$  とすると

$\pi_n = \begin{cases} (0 \ 1) & (n: \text{奇数}) \\ (1 \ 0) & (n: \text{偶数}) \end{cases}$

→ 収束しない。 極限分布は存在しない。

Thm (Zルコフ連鎖の定常分布)

Zルコフ連鎖は 既約 であると仮定する。

すると、以下は同値

- (1) ある  $j \in I$  が正再帰的
- (2) 全の  $j \in I$  が正再帰的
- (3) 定常分布  $\pi$  が存在する。

(1), (2) の正再帰性は  
クラスの状態)

(1), (2), (3) のうち、定常分布は一意に定まる。

$$\pi(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(j, j) = \frac{1}{m(j, j)}$$

で与えられる。 (  $j$  から  $j$  に戻って来るまでの平均時間  $m(j, j) \rightarrow j$  の平均的 (  $\frac{1}{m(j, j)}$  ) の割合で滞在 )

Len 正再帰的な  $j$  に対して

$$\mu(i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i, T_j > n | X_0 = j)$$
 ←  $j$  を出発して再び  $j$  に戻りきるまで  $i$  にいく回数

とすると、 $\pi(i) = \frac{\mu(i)}{m(j, j)}$  は定常分布になる。

(I の既約性は仮定してある。定常分布は一意には限らない)

(  $\pi(i)$  は  $j$  を出発して  $j$  に戻りきるまで、いく回数  $i \in I$  に滞在して回数を表す )



(Lem の proof) まず  $\mu(j) = P(X_0=j, T_j > 0 | X_0=j) = 1$  である。

( $P(T_j < \infty | X_0=j) = 1$  に注意)

$$\begin{aligned} \text{また, } \sum_{i \in I} \mu(i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I} P(X_n=i, T_j > n | X_0=j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_j > n | X_0=j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j \geq n | X_0=j) \\ &= E[T_j | X_0=j] = m(j, j) \end{aligned}$$

この  $\pi$  は 確率分布になる。

$\bar{P}^{(k)}(j, i) = P(X_l=i, T_j > l | X_0=j)$  とおくと、 $\mu$  の定義より

$$\sum_i \mu(i) p(i, k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) p(i, k)$$

である。右辺 =  $\mu(k)$  になる。

(i) ( $k \neq j$  のとき)

$$\begin{aligned} &\sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) p(i, k) \\ &= \sum_i P(X_l=i, T_j > l, X_{l+1}=k | X_0=j) \\ &= P(T_j > l, X_{l+1}=k | X_0=j) \\ &= P(T_j > l+1, X_{l+1}=k | X_0=j) \quad (\because j \neq k) \\ &= \bar{P}^{(k)}(j, k) \end{aligned}$$

$\therefore \sum_{l=0}^{\infty} (\text{右辺}) = \mu(k)$  となる。 ( $j \neq k$  に注意)

(ii) ( $k = j$  のとき)

上と同様に

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) p(i, k) &= \sum_i P(X_l=i, T_j > l, X_{l+1}=\overset{k}{j} | X_0=j) \\ &= P(T_j = l+1 | X_0=j) \end{aligned}$$

このとき、

$$\sum_{l=0}^{\infty} (\text{右辺}) = P(T_j < \infty | X_0=j) = 1 = \mu(j)$$

(Proof of Thm)

(2)  $\rightarrow$  (1) は明らか.

(1)  $\rightarrow$  (2)

$i \in I$  を任意に取る.  $j \in I$  は正再帰的であること.  
既約性より,  $i \leftrightarrow j$  である.

よって,  $\exists k, m \in \mathbb{N}$  として  $P^{(k)}(i, j) > 0, P^{(m)}(j, i) > 0$  である.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(i, i)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(i, i) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m+k} \sum_{l=1}^n \underbrace{P^{(k)}(i, j)}_{>0} P^{(l)}(j, j) \underbrace{P^{(m)}(j, i)}_{>0} \\ &= \frac{P^{(k)}(i, j)}{>0} \frac{P^{(m)}(j, i)}{>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m+k} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(j, j) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{m(j, j)} > 0$   
( $\because j$  は正再帰的,  $m$  の性質より)

つまり  $i$  は正再帰的.

(2)  $\rightarrow$  (3)  $\forall \lambda$  が正再帰的ならば, 直前の Lem より  
ある定常分布が存在する.

(3)  $\rightarrow$  (2)

既約性より, 定常分布  $\pi$  (= 対し,  $\pi(j) > 0$  なる  $j \in I$ ) である.

$\forall i \in I$  として  $j \rightarrow i$  である. よって, ある  $n \in \mathbb{N}$  として  $P^{(n)}(j, i) > 0$   
とできる. よって

$$\pi(i) = \sum_{j'} \pi(j') P^{(n)}(j', i) \geq \pi(j) P^{(n)}(j, i) > 0$$

となる. 一方,  $\forall j \in I$  である

$$\pi(j) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k \in I} \pi(k) P^{(l)}(k, j) \right)$$

( $\because \pi = \pi(j), \pi$  は定常分布なので)

$$= \sum_{k \in I} \pi(k) \left( \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(k, j) \right)$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{優収束定理}} \sum_{k \in I} \pi(k) \frac{1}{m(j, j)} = \frac{1}{m(j, j)}$$

よさのび、  $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$  が成り立つ

これ  $\pi(i) > 0$  を合わせて  $\frac{1}{m(i,i)} > 0$  である。

よって、 $m(i,i) < \infty$ 、つまり  $i$  は正再帰的。

(一意性) 上の議論で、 $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$  が  $\frac{1}{\sum_{j \in I} m(i,j)}$  のび、  
一意性も示すことができる。

Def (周期性)

$i$  の周期  $d(i) = p^{(n)}(i,i) > 0$  なる  $n \geq 1$  の最大公約数

Lem

$i \leftrightarrow j$  なら  $d(i) = d(j)$  (周期はクラスの性質)

Thm (極限分布の存在条件)

マルコフ連鎖が既約であること。

連鎖が  $\begin{cases} \text{正再帰的} \\ \text{非周期的} \end{cases} \iff \underline{\text{極限分布が存在}}$

Note

この極限分布は定常分布で  $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$  である。

正再帰的なら定常分布が存在。

Lem

既約で正再帰的なマルコフ連鎖が非周期的なら  
 $\forall i, j \in I$  で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i,j) = \frac{1}{m(i,i)} = \pi(i) \quad (\text{定常分布})$$

周期的 ( $d(i) \geq 2$ ) なら、 $p^{(n)}(i,j)$  は収束しない。

(証明は、カッパの方法による。補足資料を参照のこと)

(Proof of Thm)

( $\Rightarrow$ ) Lem 12 より.

( $\Leftarrow$ ) 極限分布が存在すれば、定常分布が存在するので、正再帰的.

また、先の Lem 8) 周期的なら  $P^{(n)}(i,i)$  は収束せず.

極限分布が存在しなくなるので、非周期的でなくともいい.

Thm (大数の強法則)

既約かつ定常分布  $\pi$  が存在すると、(極限分布の存在は仮定しない)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  かつ  $\sum_{i \in I} |f(i)| \pi(i) < \infty$  (つまり  $E_{\pi}[|f(X)|] < \infty$ )  
可積分

なら、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow{\text{a.s.}} E_{\pi}[f(X)] \quad (4.8)$$

↓  
Z(1)連鎖

\* 大数の強法則により、MCMC法が正当化される.