

確率数理工学3

これまでの内容を逆にたどってみる.

- 分布関数 $F(x)$:
- $$\begin{cases} (1) x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y) \\ (2) \lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = F(a) \text{ (右連続)} \\ (3) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \end{cases}$$

(ある確率変数 X に対し,
 $P(X \leq x) = F(x)$ を想定)

が与えられたとする.

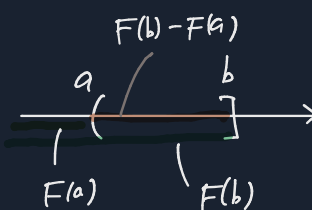
- F に対応する $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P は一意に存在する.
 つまり $P((-\infty, a]) = F(a) \ (a \in \mathbb{R})$ を満たす P は存在.

よそのためには
 $\{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$
 は可測) なくては
 けない $\rightarrow$ 確率変数の定義

- まず $P((a, b]) = F(b) - F(a) \ (a < b)$ とする.

- ① $\mathcal{S} = \{(a, b] \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ は "集合半環" になっている.

人甘飯
 中
 前回補足資料



Q: この集合族まで P を一意に拡張できる?

- ② $(a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$ と互いに重ならない区間 $(a_n, b_n] \ (n=1, 2, \dots)$ に分解した時,

P は $P((a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} P((a_n, b_n])$ を満たすことを示せる. (非自明)

$$(F(b) - F(a)) = \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n))$$

$[F(b), F(a)]$ の
 コンパクト性を使う.

$\Rightarrow P$ は $\mathcal{S}$ 上で σ -加法的 と言う.

- $0 \leq P(A) \leq 1 \ (A \in \mathcal{S})$
- $P(\mathbb{R}) = 1$
- $\mathcal{S}$ 上で σ -加法的

- ③ Hoeffding の拡張定理 (の一般化):

上の3つの性質を満たす $\mathcal{S}$ 上の集合関数 $P: \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ は

$\mathcal{S}$ を含む最小の σ -加法族 $\sigma(\mathcal{S})$ 上の確率測度 λ 一意に拡張される.

A: $\sigma(\mathcal{S})$ ($\mathcal{S}$ を含む最小の σ -加法族) まで

- ④ $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることより, 示 (たいてい) 言える.

- こうして拡張された $\mathcal{P}$ および、その定義域である $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の性質を抜き出して書き下す。

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は σ -加法族 $(\mathcal{F})$

$$\begin{cases} (1) \Omega \in \mathcal{F} \\ (2) A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \\ (3) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F} \end{cases}$$

$(\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ の組を一般化した。
 $(\Omega, \mathcal{F})$: 可測空間と書く。

$\mathcal{P}$ は 確率測度

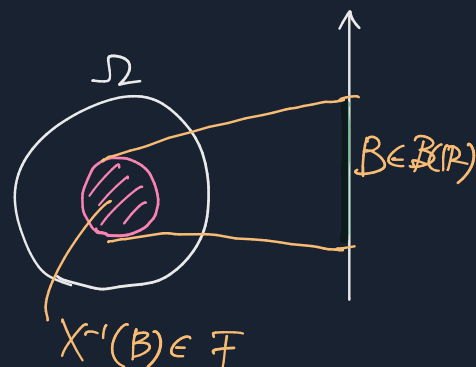
$$\begin{cases} (1) \forall A \in \mathcal{F}, 0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1 \\ (2) \mathcal{P}(\Omega) = 1 \\ (3) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ (互いに排互)} \\ \Rightarrow \mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n) \end{cases}$$

$(\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P})$ の組を一般化した $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ と書き、確率空間と言う。

$(\Omega, \mathcal{F})$: 可測空間

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ を満たすとき、 X を 確率変数 と呼ぶ。

$\iff$ 同値な定義 $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ 。



- $\{X \leq x\}$ なる事象は可測であって欲しい。
 そうでなければ分布関数も定義できない。
- $\{X \leq x\}$ が可測なら、自動的に $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ が成立してしまう。

※ ある部分集合族 $\mathcal{A}$ で成り立つ性質 $\mathcal{A}$ を含む最小の σ -加法族を拡張する。このような測度論で導出の論法。

- 開区間の全体 $\mathcal{A} = \{(a, b) \mid a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$ に対し、 $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 。

($\because$) $\mathbb{R}$ 内に有理数 q が稠密であることを使う。

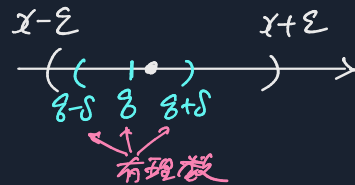
$\sigma(\mathcal{A})$ が任意の開集合を含むことを示せば、 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ が定義より成り立つ。
 任意の開集合 $B \subset \mathbb{R}$ は可算無限個の開区間 $(a-\delta, a+\delta)$ ($a \in \mathbb{Q}, \delta \in \mathbb{Q}$) の和集合で書けることを示せば十分である。

よって $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

と必ず示す。任意の $x \in B$ に対し、 B は開集合であることより、

ある $\varepsilon > 0$ が存在し、 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset B$ となる。

よって、ある有理数 q と有理数 $\delta > 0$ が存在し、



$$x \in (q - \delta, q + \delta) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset B$$

となる。 (たとえば $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ とし、 $x \pm \delta$ の間から有理数 q をとり取ればよい)

このように、各 x ごとに q_x, δ_x を取ると、 $I_x = (q_x - \delta_x, q_x + \delta_x)$ をおけば、

$$B \subset \bigcup_{x \in B} I_x \text{ である。一方、 } I_x \subset B \text{ (} \forall x \in B \text{) より、 } \bigcup_{x \in B} I_x \subset B \text{ なので、 } B = \bigcup_{x \in B} I_x$$

である。一方、 q_x, δ_x はともに有理数なので、 $\bigcup_{x \in B} I_x$ は高々可算個の区間

$(q - \delta, q + \delta)$ の和集合。よって、 U_B : 開集合は $B \in \mathcal{G}(A)$ である。

このようにある距離空間 (又は位相空間) が

可算な稠密部分集合をもつとき、「可分である」と言う。

(可分な距離空間, 可分な位相空間)

Def (多変量確率変数, 多次元確率変数, 確率ベクトル) 二つまでの復習. ここまで.

$(\Omega, \mathcal{F})$: 可測空間

$X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ が多変量確率変数 (確率ベクトル)

$\iff X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が確率変数, i.e., $X_i^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F} \text{ (} \forall a \in \mathbb{R} \text{)}$
($i=1, \dots, n$)

別の定義

「 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ が確率ベクトル $\iff X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \text{ (} \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \text{)}$ 」

つまり、 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ が $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -可測

(下 $\Rightarrow$ 上): $\pi_k(x) = x_k$ とおけば: $X_k = \pi_k \circ X$ である。

π_k は連続関数なので可測。可測関数の合成は可測

となるので、 X_k も可測 ($k=1, \dots, n$)。

(上 $\Rightarrow$ 下): $\mathcal{A} = \{I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n \mid I_k = (a_k, b_k] \text{ (} a_k \leq b_k \text{)}\}$

とすると、 $A = I_1 \times \dots \times I_n \in \mathcal{A}$ に対し、 $X^{-1}(A) = \bigcap_{k=1}^n X_k^{-1}(I_k) \in \mathcal{F}$ である。

$\sigma(A) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ と $X^{-1}(\sigma(A)) = \sigma(X^{-1}(A))$
 に気づけよ。
 $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) = X^{-1}(\sigma(A))$
 $= \sigma(X^{-1}(A))$
 $\subset \mathcal{F}$

$\mathcal{C}$ 集合族 $\mathcal{A}$ に対し. (第2問の演習)
 $X^{-1}(\mathcal{A}) = \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$
 に書く.

を介する.

◦ 直積 σ -加法族: $(\Omega_k, \mathcal{F}_k)$ ($k=1, \dots, n$) を可測空間とする.

$\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ 上の σ -加法族 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_n = \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{F}_k$ を

$\{A_1 \times \dots \times A_n \mid A_k \in \mathcal{F}_k\}$ を含む最小の σ -加法族とする.

これを 直積 σ -加法族 と呼ぶ.

→ 実は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である. (演習問題)

Def (同時分布関数)

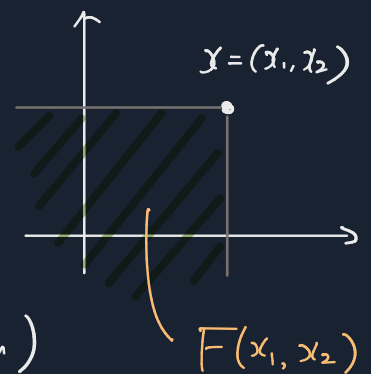
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間

$X = (X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ を確率ベクトルとする.

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ にする.

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} P\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x_k\}\right)$$

$$= P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$



としたとき F を $X = (X_1, \dots, X_n)$ の 同時分布関数 と言う.
 (joint distribution function)

特に

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

(ルベーグ積分)

とある非負関数 f を用いて書ける時,

f を 同時確率密度関数 と言う.

(joint probability density function)

◦ (Radon-Nikodymの定理)
 F がルベーグ測度に対して絶対連続の時.

Cor (同時分布関数の性質)

$$1. a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2 \implies F(a_1, b_1) \leq F(a_2, b_2) \quad (\text{単調性})$$

$$2. \lim_{\substack{x_1 \searrow a+0 \\ x_2 \searrow b+0}} F(x_1, x_2) = F(a, b) \quad (\text{右連続性})$$

$$3. \lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty}} F(x_1, x_2) = 1, \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -\infty \\ x_2: \text{fix}}} F(x_1, x_2) = 0, \lim_{\substack{x_2 \rightarrow -\infty \\ x_1: \text{fix}}} F(x_1, x_2) = 0$$

(・確率の連続性より) 極限の取り方によらない
(・ $n \geq 3$ についても同様の性質が成り立つ)

Remark

1次元の場合と同様にして、性質1,2,3を満たす F から与えられる

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ の確率測度が一意に決まる. (π - λ 定理, Halmosの拡張定理)
前日補足資料を参照

Def (周辺分布)

$$F_1(x_1) = F(x_1, +\infty) = P(X_1 \leq x_1) (= P(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq \infty))$$

を X_1 の周辺分布関数と云う.

(marginal distribution function)

$$F_2(x_2) = P(X_2 \leq x_2) \text{ も同様}$$

より一般に $F_k(x_k) = P(X_k \leq x_k)$ を X_k の周辺分布関数と云う

$$F_k(x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} f_k(u_k) du_k \text{ と非負(可測)関数 } f_k \text{ を用いて書ける時.}$$

f_k を 周辺確率密度関数 と云う

同時分布が絶対連続なら、周辺密度は、

$$f_k(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \dots, \underbrace{u_{k-1}, x_k, u_{k+1}, \dots, u_n}_{= \text{ここは固定}}) du_1 \cdots du_{k-1} du_{k+1} \cdots du_n$$

と表される。

Def (確率変数の独立性)

$X_1, \dots, X_n$: r.v. が独立

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n) \quad (\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

と分解できる.

同値な定義がいくつかある. 以下の定義はその中をいくつかの定義である.

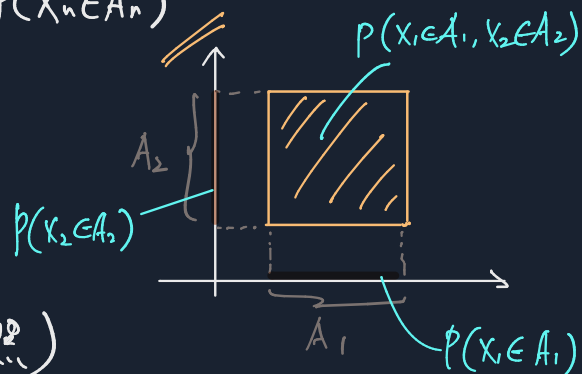
Prop. $X_1, \dots, X_n$: r.v. が独立 $\iff P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) (=P(\bigcap_{k=1}^n \{X_k \in A_k\}))$
 $= P(X_1 \in A_1) \dots P(X_n \in A_n)$

(証明)

下の定義が上の定義と一致することを示す.

逆を示す.

そのために π - λ 定理 を用いる. (前図補足資料参照)



• π -システム: 集合族 $\mathcal{P}$ が π -システム $\iff A, B \in \mathcal{P}$ なら $A \cap B \in \mathcal{P}$

• λ -システム: 集合族 $\mathcal{L}$ が λ -システム $\iff$

{

(1) $\Omega \in \mathcal{L}$

(2) $A, B \in \mathcal{L}, A \subset B \Rightarrow \underbrace{B \setminus A}_{B \cap A^c} \in \mathcal{L}$

(3) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \in \mathcal{L}$
 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$

注: σ -加法族は π -システムでも λ -システムでもある.

Thm (Dynkinの π - λ 定理)

ある λ -システム $\mathcal{L}$ が、ある π -システム $\mathcal{P}$ を含む ($\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$) なら、

$\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ である.

← 証明は

前回の
補足資料を
参照のこと.

2変数で示す. 多変数の場合は同様 (2) 章補法で示せる.

$\mathcal{A}_1 = \{(-\infty, x_1] \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{(-\infty, x_2] \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ とする.

$\forall A \in \mathcal{A}_1, \forall B \in \mathcal{A}_2$ に対して $P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(X_1 \in A)P(X_2 \in B)$ である.

また $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\sigma(\mathcal{A}_2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることに注意する.

今 $A_2 \in \mathcal{A}_2$ を 1 つ固定して.

$$\mathcal{L} = \{ A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}) \mid P(X_1 \in A \cap X_2 \in A_2) = P(X_1 \in A) P(X_2 \in A_2) \}$$

とある. $\mathcal{L} \supset \mathcal{A}_1$ であることは独立性の定義から従う.

$\mathcal{L}$ は λ -システムであることも示せる (例: π - λ 定理より). $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{L}$ である.

$$(a) \Omega = \mathcal{R} \in \mathcal{L}. \text{ なるから } P(X_1 \in \Omega, X_2 \in A) = P(X_2 \in A) \\ = \underbrace{P(X_1 \in \Omega)}_1 P(X_2 \in A)$$

(b) $A, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \subset B$ とする. このとき.

$$P(X_1 \in (B \setminus A), X_2 \in A_2) = P(\{X_1 \in B\} \cap \{X_2 \in A_2\} \setminus (\{X_1 \in A\} \cap \{X_2 \in A_2\})) \\ = P(X_1 \in B, X_2 \in A_2) - P(X_1 \in A, X_2 \in A_2) \\ A, B \in \mathcal{L} \text{ より } \rightarrow = P(X_1 \in B) P(X_2 \in A_2) - P(X_1 \in A) P(X_2 \in A_2) \\ = (P(X_1 \in B) - P(X_1 \in A)) P(X_2 \in A_2) \\ = P(X_1 \in B \setminus A) \cdot P(X_2 \in A_2)$$

よって $B \setminus A \in \mathcal{L}$

(c) $\hat{A}_1 \subset \hat{A}_2 \subset \dots \in \mathcal{L}$ のとき.

$$P(X_1 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n, X_2 \in A_2) = P\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_1 \in \hat{A}_n\}\right) \cap \{X_2 \in A_2\}\right]$$

$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\{X_1 \in \hat{A}_n\} \cap \{X_2 \in A_2\})\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{X_1 \in \hat{A}_n\} \cap \{X_2 \in A_2\}) \quad (\because \text{確率の連続性} \\ \text{と } \hat{A}_n \text{ の単調性})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_1 \in \hat{A}_n) \cdot P(X_2 \in A_2)$$

$$= P(X_1 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n) \cdot P(X_2 \in A_2)$$

$$\begin{aligned} & \leftarrow \text{これは} \\ & \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(\hat{A}_n) \\ & = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n\right) \\ & \text{である} \end{aligned}$$

よって $\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \in \mathcal{L}$ である.

以上より $\mathcal{L}$ は λ -システムなので $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{L}$ である.

つまり $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{R}), \forall B \in \mathcal{A}_2$ に対し $P(A \in X_1, B \in X_2) = P(A \in X_1) \cdot P(B \in X_2)$.

さらに同じ議論を $A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ を固定して $\mathcal{A}_2$ の方に適用し.

$\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ と $\sigma(\mathcal{A}_2) = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ まで拡張すればよい. //

(独立性について続き.)

Def (事象の独立性)

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ が独立 $\iff$ 任意の部分集合 $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対し.

$$P\left(\bigcap_{k \in I} A_k\right) = \prod_{k \in I} P(A_k)$$

先の r.v. の独立性は、事象の独立性の言葉を用いる.

$X_1, \dots, X_n$ が独立 $\iff X_i^{-1}(A_i), \dots, X_n^{-1}(A_n)$ が任意の $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ に対し独立.

と書くことも可能.

Def (σ -加法族の独立性)

Ω 上の n 個の σ -加法族 $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ が独立.

$\iff$ 任意の $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ が独立.

(σ -加法族と呼ぶ)

同様に集合族 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ の独立性も定義できる.

Def (確率変数によって生成される σ -加法族)

$X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R}))$ (r.v.)

に対し.

$\mathcal{G}(X) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{R})) = \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathcal{R})\}$

と書く. ここで、 X の生成する σ -加法族と言う.

(亦しに集合の逆像によって作られる σ -加法族)

すると.

$X_1, \dots, X_n$ (r.v.) が独立 $\iff \mathcal{G}(X_1), \dots, \mathcal{G}(X_n)$ が独立

でもある.

実は、先の X の独立性の同値性と同じ議論により、次のことも示せる.

Thm (参考)

$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ を Ω における非空な集合族とある.

(1) $\mathcal{A}_k$ は π -システム ($k=1, 2, \dots, n$)

(2) $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ は独立.

$\implies \mathcal{G}(\mathcal{A}_1), \dots, \mathcal{G}(\mathcal{A}_n)$ も独立.

密度関数を持つ場合は.

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

と書けることは独立性的の必要十分条件になる.

Ex. (正規分布)

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \text{分散共分散行列}$$

= 平均 ($\Sigma_{ij} = \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)$])

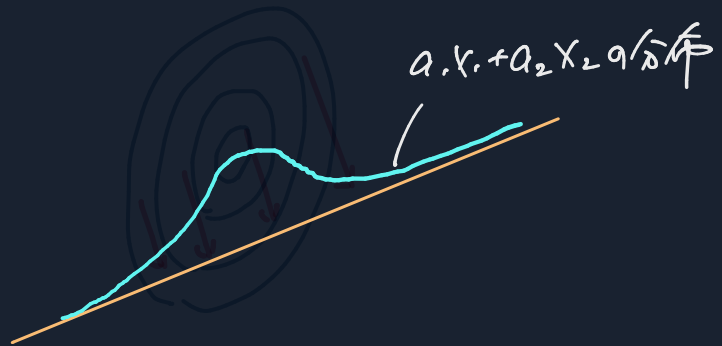
$$\text{同時密度: } f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right)$$

$$\text{周辺密度: } f_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \Sigma_{11}}} \exp\left(-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2 \Sigma_{11}}\right)$$

$$\star X_1 \text{ と } X_2 \text{ が独立} \iff \Sigma_{12} = \Sigma_{21} = 0$$

(参考): 実は $X = (X_1, X_2)$ が 2 変量正規分布

$\iff \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対し $a_1 X_1 + a_2 X_2$ が正規分布



条件付き確率

Def (条件付き確率)

(例) B : 身長が 170cm 以上
 A : 年収が 500 万 円以上

事象 B が起きたもとでの事象 A が起きる確率 ($A, B \in \mathcal{F}$)

$$P(A|B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



ただし, $P(B) \neq 0$ とする.



B : 固定のもとで, $A \in \mathcal{F} \mapsto P(A|B)$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度になっていることはすぐに確認できる.

Remark この定義だと, $P(B) = 0$ の場合は well-defined にできない.

そのような状況は連続な r.v. X に対し, $B = \{X = x\}$ とした時等に起きる. そのような状況も扱える条件付き確率の定義は後で述べる.

Cor (条件付き確率の公式)

(1) 積の公式

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

(2) Bayes の公式

$$\textcircled{2} \quad P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

← 原因から結果の確率がわかれば, 結果から原因の確率を逆算できる.

特に, $A_1, \dots, A_n$ が互いに排反かつ

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \text{ なら}$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

例

人口の 0.1% が AIDS 病気にある。

ある検査では、病気の患者の 99% が陽性を示し、

健康者の 10% が陽性を示す。

この検査を受けると陽性だった時、本当に病気である確率は?

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{0.99 \times 0.001}{0.99 \times 0.001 + 0.1 \times 0.999} \\ &\approx \underline{0.0098} \quad (1\% \text{ に満たない}) \end{aligned}$$

Remark

ベイズの定理は ロボットの自己位置推定や天気予報等にも使われている。

演習問題

(1) $\mathcal{A} = \{ (-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n] \mid a_k \in \mathbb{R} \}$

(2) $\sigma(\mathcal{A})$ は $\{ (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \mid -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty \}$

を含むことを示せ.

(2) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を示せ.

(3) $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n : \Omega$ における非空な集合族

(1) $\mathcal{A}_k$ は π -システム

(2) $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ は独立.

$\implies \sigma(\mathcal{A}_1), \dots, \sigma(\mathcal{A}_n)$ も独立.

を示せ.

(4) $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ が可測ならば, $X_1, \dots, X_n$ が r.v. のとき,

$f(X_1, \dots, X_n)$ が r.v. になることを示せ.

(5) $X_1, \dots, X_n$ が r.v. のとき, $X_1 + \dots + X_n$ も r.v. であることを示せ.

(6) ある分布関数 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad ((x_1, x_2) \in [0, 1]^2)$$

をみたす時, 対応する確率測度 P について,

$$P(\{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\})$$

を求めよ.

(7) $(\Omega, \mathcal{F}) = \text{可測空間}$, $X_1, X_2, \dots$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の有界な r.v. である.

(a) $\sup_n X_n, \inf_n X_n$ はともに r.v. であることを示せ.

(b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ が r.v. であることを示せ.

(c) $\forall \omega \in \Omega$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ が存在する.

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ は r.v. であることを示せ.

(9) $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ を確率ベクトルとし、

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $\exists k \in \mathbb{R}$ で、 $P(\max_k |X_k| \geq k) \leq \varepsilon$ であることを示せ。
($0 \leq k < \infty$)

(10) 連続な分布関数 F は 一様に連続 であることを示せ。

(11) 共通の連続な分布関数 F を持つ2つの独立な r.v. X_1, X_2 を考える。 $P(X_1 = X_2) = 0$ を示せ。 (少し難)

(12) X_1, X_2 は独立な r.v. で、同じ分布関数を持つもの。

このとき、 $X = (X_1, X_2)$ と $\bar{X} = (X_2, X_1)$ は同じ同時分布関数を持つことを示せ。

(13) $\Omega = \{1, \dots, r\}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in \{1, \dots, r\}, k=1, \dots, n\}$

Ω 上に一様分布 P を考える。このとき、 $X_k((x_1, \dots, x_n)) = x_k$ とすると、
 $X_1, \dots, X_n$ は独立であることを示せ。

(14) 東京都の住人から1人1人にランダムにピックアップして、新型コロナウイルスに
関するPCR検査を受けてもらった。結果は陰性であった。その人か
実は感染している確率を見積もれ。

(正確な値は出せないのでも
各種統計量から"見積もる"
だけで良い。)