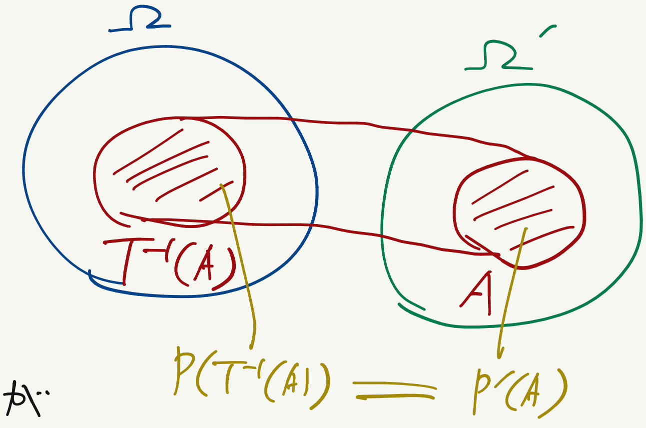
確率数理工学5

期待値の性質 続き.

・変数変換の期待値



$T:(\Omega,\mathcal{F}) \to (\Omega',\mathcal{F}')$ (可測)

$P:(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度

とおくと. P の push-forward $P' = T\#P$ が

$$P'(A) = P(T^{-1}(A)) \quad (A \in \mathcal{F}')$$

として定義できる. (P' は $(\Omega',\mathcal{F}')$ 上の確率測度)

今

$X':(\Omega',\mathcal{F}') \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (r.v.)

の期待値を考える.

Thm (変数変換の定理)

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "X"'] & \Omega' \arrow[d, "X'"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$X(\omega) = X'(T(\omega))$ とすると.

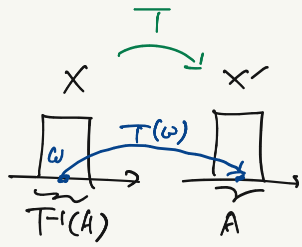
$$\underbrace{\int X'(\omega')\,dP'(\omega')}_{\Omega'\text{での積分}} = \underbrace{\int X(\omega)\,dP(\omega)}_{\Omega\text{での積分}} \quad /\!/$$

(証明)

期待値の定義から. $X' = \mathbb{1}_A$ $(A \in \mathcal{F}')$ で示せば十分.

このX'に対し. $X = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}$ であることはすぐにわかる.

このとき.



$$\int_{\Omega'} X'\,dP' \underset{E[\cdot]\text{の定義}}{=} P'(A) \underset{P'\text{の定義}}{=} P(T^{-1}(A)) \underset{E[\cdot]\text{の定義}}{=} \int_\Omega \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}\,dP \underset{X=X'\circ T\text{より}}{=} \int_\Omega X\,dP$$

//

これから. r.v. X の期待値が $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の積分で表せることがわかる.

$X:(\Omega,\mathcal{F}) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に対し.

$F = X\#P$ とする. $(F(A) = P(X^{-1}(A)),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$F((-\infty,x]) = P(X^{-1}((-\infty,x])) = P(X \le x) = F(x)$

$F((-\infty,x]) = F(x)$ (分布関数:同じ表記を用いていることに注意) である.

すると. $X'(x) = x$ に対し. $X = X' \circ X$ であり. $\int_{\mathbb{R}} X'(x)\,dF(x) = \int_{\mathbb{R}} x\,dF(x) = \int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega)$

先のTをXとしている.

☒ モーメント母関数と特性関数

Def (モーメント母関数)

$t \in \mathbb{R}$: パラメータ

X : r.v.

$$M(t) \overset{\text{def}}{=} E[e^{tX}]$$

→ モーメント母関数と言う

Cor (モーメント母関数とモーメント)

$\mu_j = E[X^j]$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$: j次モーメント

$$M(t) = E[e^{tX}] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mu_j \quad \text{(テイラー展開)}$$

↑ $E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} |X|^j\right] < \infty$ とする

と書ける.

$M(0) = 1, \quad M'(0) = \mu, \quad M''(0) = \mu_2, \ \cdots, \ M^{(k)}(0) = \mu_k$

⟹ Mを微分して$t=0$を代入すれば、k次モーメントが得られる.

注: e^{tX}は必ずしも積分可能ではない.

Def (特性関数)

t: パラメータ

X : r.v.

$$\phi(t) \overset{\text{def}}{=} E[e^{itX}] = E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)]$$

を特性関数 (characteristic function) と呼ぶ.

$|\phi(t)| \leq 1$: 可積分

→ 任意のtに対して特性関数の値が確定する

Cor（特性関数とモーメント）

ある k（自然数）で $E[|X|^k] < \infty$ とする．（$\mu_k = E[X^k]$ が存在）

$$\phi^{(k)}(t) = E[(iX)^k e^{itX}] \quad (\phi \text{の} k \text{回微分})$$

$$\phi^{(k)}(0) = E[(iX)^k] = i^k \mu_k$$

よって．$\boxed{\mu_k = \dfrac{\phi^{(k)}(0)}{i^k}}$．

特に．$E[X] = \dfrac{\phi'(0)}{i}$

$$Var[X] = -\phi''(0) + \phi'(0)^2$$
$$(= \mu_2 - \mu_1)$$

//

※ 本当は積分と微分の交換には条件が必要だが，上記の条件ではO.K．

（ある可積分な Z が存在して．$\left|\frac{\partial}{\partial t'} g(t', X)\big|_{t'=t}\right| \leqq Z$ $(t_0 - \varepsilon \leqq t \leqq t_0 + \varepsilon)$ ← $\varepsilon > 0$

のとき．$\frac{\partial}{\partial t} E[g(t, X)]\big|_{t=t_0} = E\left[\frac{\partial}{\partial t} g(t, X)\big|_{t=t_0}\right]$ である．）

Cor（特性関数の性質）

(1) $\phi(0) = 1$，$|\phi(t)| \leqq 1$，$\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$

(2) $\overline{\phi(t)}$ は $-X$ の特性関数

(3) $\phi(t)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数 ← 優収束定理

(4) $Y = aX + b$ として．X と Y の特性関数を

$\phi_X(t)$，$\phi_Y(t)$ とすると．

$$\phi_Y(t) = E[e^{it(aX+b)}] = e^{itb} \phi_X(at)$$

Ex.（正規分布の特性関数）

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \exp(itx)\,dx$$

$$= \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \quad \longleftarrow \text{コーシーの積分定理より.}$$

$$\phi'(t) = (i\mu - \sigma^2 t)\exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

$$\phi''(t) = -\sigma^2 \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) + (i\mu - \sigma^2 t^2)^2 \exp\left(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)$$

より.

$$\begin{cases} \phi'(0) = i\mu \\ \phi''(0) = -\sigma^2 - \mu^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E[X] = \dfrac{\phi'(0)}{i} = \mu \\ Var[X] = -(-\sigma^2 - \mu^2) - \mu^2 \\ \qquad\quad = \sigma^2 \end{cases}$$

Ex.（二項分布）

$$f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$\phi(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{itx} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (e^{it}\theta)^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$= \left(e^{it}\theta + (1-\theta)\right)^n$$

$$\phi'(0) = n\theta i \Longrightarrow E[X] = \frac{\phi'(0)}{i} = n\theta$$

$$\phi''(0) = -\theta^2 n(n-1) - \theta n$$

$$\Longrightarrow Var[X] = -\phi''(0) + \phi'(0)^2$$

$$= \theta^2 n(n-1) + \theta n - (n\theta)^2$$

$$= n\theta(1-\theta)$$

Def (キュムラント母関数)

X: r.v. , $\phi(t)$: Xの特性関数

$\psi(t) \overset{\text{def}}{=} \ln \phi(t)$ ($\ln$: 自然対数, $\log_e$)

をキュムラント母関数と呼ぶ

$$\psi(t) = \ln \phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j$$

と展開した時、k_j を j 番目のキュムラント と呼ぶ
(j次キュムラント)

Cor (キュムラント母関数とキュムラントの関係)

$\forall s$: 自然数

$\psi^{(s)}(0) = i^s k_s$ より

$$k_s = \frac{\psi^{(s)}(0)}{i^s}$$

Cor (平均値まわりのモーメントとキュムラントの関係)

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \ln E[e^{itX}] \\
&= \ln E[e^{it(X-\mu)+it\mu}] \\
&= it\mu + \ln\Bigl(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} \nu_j}_{=\,1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} \nu_j}_{(*)} \quad (\because \nu_1 = 0)}\Bigr) \qquad (\nu_j = E[(X-\mu)^j])
\end{aligned}$$

$$= it\mu + (*) - \frac{1}{2}(*)^2 + \frac{1}{3}(*)^3 + \cdots \qquad \left(\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right)$$

$$\begin{aligned}
= it\mu &+ \frac{(it)^2}{2!}\nu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\nu_3 + \frac{(it)^4}{4!}\nu_4 + \frac{(it)^5}{5!}\nu_5 + \frac{(it)^6}{6!}\nu_6 + \cdots \\
&- \frac{1}{2}\cdot\frac{(it)^4}{2!2!}\nu_2\nu_2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{(it)^5}{2!3!}\nu_2\nu_3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(it)^6}{3!3!}\nu_3\nu_3 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{(it)^6}{2!4!}\nu_2\nu_4 \cdots \\
&+ \frac{1}{3}\cdot\frac{(it)^6}{2!2!2!}\nu_2\nu_2\nu_2 + \cdots
\end{aligned}$$

Cor (平均値まわりのモーメントとキュムラントの関係)

$$\psi(t) = \ln E[e^{itX}]$$

$$= \ln E[e^{it(X-\mu)+it\mu}]$$

$$= it\mu + \ln\Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} \nu_j}_{=\,1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!}\nu_j}_{(*)} \quad (\because \nu_1 = 0)} \Big) \qquad (\nu_j = E[(X-\mu)^j])$$

$$= it\mu + (*) - \frac{1}{2}(*)^2 + \frac{1}{3}(*)^3 + \cdots \quad \leftarrow \left(\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right)$$

$$= it\mu + \frac{(it)^2}{2!}\nu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\nu_3 + \frac{(it)^4}{4!}\nu_4 + \frac{(it)^5}{5!}\nu_5 + \frac{(it)^6}{6!}\nu_6 + \cdots$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{(it)^4}{2!2!}\nu_2\nu_2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{(it)^5}{2!3!}\nu_2\nu_3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(it)^6}{3!3!}\nu_3\nu_3 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{(it)^6}{2!4!}\nu_2\nu_4 \cdots$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\frac{(it)^6}{2!2!2!}\nu_2\nu_2\nu_2 + \cdots$$

$t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6$ の係数を比較すると.

$\kappa_1 = \mu$

$\kappa_2 = \nu_2 = \sigma^2$

$\kappa_3 = \nu_3$

$\kappa_4 = \nu_4 - 3\nu_2^2$

$\kappa_5 = \nu_5 - 10\nu_2\nu_3$

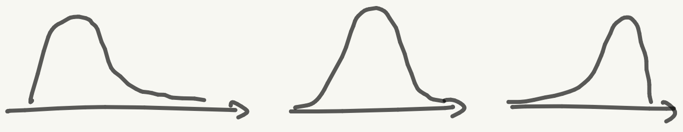
$\kappa_6 = \nu_6 - 10\nu_3^2 - 15\nu_2\nu_4 + 30\nu_2^3$

Def (歪みと尖り)

歪み (skewness)

$$\beta_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = \frac{\nu_3}{\sigma^3}$$

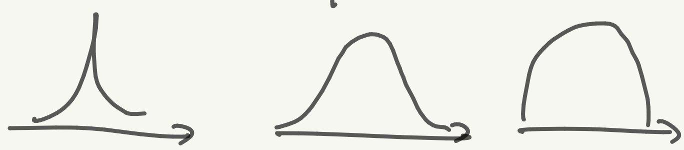
$\beta_1 > 0$ $\quad\beta_1 = 0\quad$ $\beta_1 < 0$



尖り (kurtosis)

$$\beta_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} = \frac{\nu_4 - 3\nu_2^2}{\sigma^4}$$

$\beta_2 > 0$ $\quad\beta_2 = 0\quad$ $\beta_2 < 0$



(正規分布)

Ex. (正規分布の歪みと尖り)

$\phi(t) = \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$

$$\psi(t) = it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \nearrow \begin{cases} \psi'(t) = i\mu - \sigma^2 t \\ \psi''(t) = -\sigma^2 \\ \psi^{(k)}(t) = 0 \quad (k \geq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = \mu \\ \kappa_2 = \sigma^2 \\ \kappa_3 = \kappa_4 = \kappa_5 = \cdots = 0 \end{cases}$$

演習問題

ヒント: 優収束定理

(1) X_n: r.v. $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|] < \infty$ のとき、$\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] = E[\sum_{n=1}^{\infty} X_n]$ を示せ.

(2) $P(0 \le X < \infty) = 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} n E\left[\frac{1}{X}\mathbb{1}[X>n]\right] = 0$ を示せ.

(3) 優収束定理を用いて、本文中の微分と積分の交換可能性を示せ.

ヒント: $g(t,x)$ が $t\in(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ で偏1階微分可能なとき、

$0 < \forall h < \varepsilon$ で、$\exists \theta \in [0,1]$ で

$$\frac{g(t+h,x) - g(t,x)}{h} = \frac{\partial}{\partial t} g(t+\theta h, x)$$

とできる、よって $\left|\frac{\partial}{\partial t} g(t+\theta h, x)\right| \le Z$

を用いて、優収束定理を適用する.

(4) 一様分布の特性関数を求めよ.

特性関数を用いて平均と分散を求めよ.

(5) 正規分布の特性関数を導出せよ.

(6) p.d.f. が $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$ である分布の特性関数を求めよ.

(7) モーメント母関数が発散する例を示せ.

(8) 特性関数の連続性 ($\phi(t_n)\to\phi(t)$ if $t_n \to t$) を示せ.

ヒント: 優収束定理

(9) $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ が2乗可積分の時、

$X_1, \dots, X_n$ を用いて X_{n+1} を線形予測する最小2乗解を求めよ.

つまり、

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i - X_{n+1}\right)^2\right]$$

を最小にする $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ を求めよ. (解は1つとは限らない)