

確率数理工学5

期待値の性質 続き.

• 変数変換の期待値

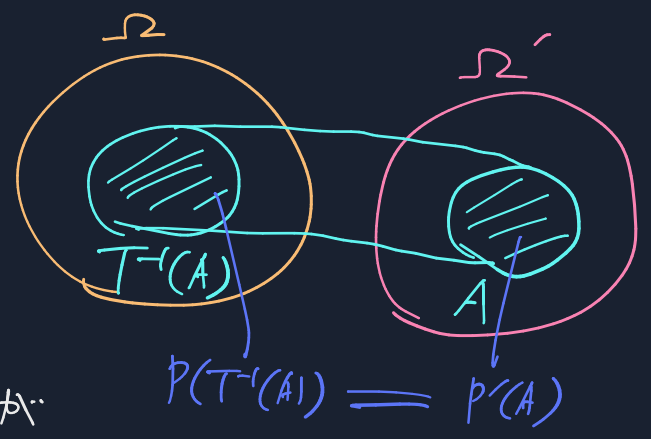
$T: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ (可測)

$P: (\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度

とすると P の push-forward $P' = T\#P$ が

$$P'(A) = P(T^{-1}(A)) \quad (A \in \mathcal{F}')$$

と定義される. (P' は (Ω', \mathcal{F}') 上の確率測度)



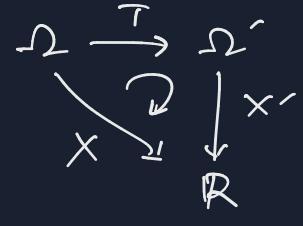
今

$X': (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (r.v.)

の期待値を考へる.

Thm (変数変換の定理)

$$X(\omega) = X'(T(\omega)) \quad \text{とすると}$$



$$\int_{\Omega'} X'(\omega') dP'(\omega') = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

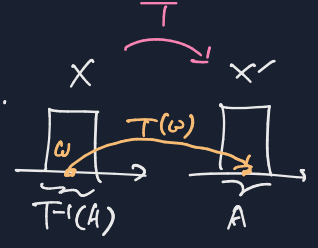
Ω' での積分 Ω での積分

(証明)

期待値の定義から $X' = \mathbb{1}_A \quad (A \in \mathcal{F}')$ を示せば十分.

この X' に対し $X = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}$ であることはすぐわかる.

このとき



$$\int_{\Omega} X' dP' \underset{\text{E[] の定義}}{=} P'(A) \underset{P' \text{ の定義}}{=} P(T^{-1}(A)) \underset{\text{E[] の定義}}{=} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} dP \underset{X = X' \circ T \text{ より}}{=} \int_{\Omega} X dP$$

よって r.v. X の期待値が $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の積分で表せることがわかる.

$X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に対し

$$F((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(X \leq x) = F(x)$$

$F = X\#P$ とする. ($F(A) = P(X^{-1}(A)), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

$F((-\infty, x]) = F(x)$ (分布関数 = 同じ表し2区間u2u8とc(2注意) である.)

$$\text{よって } X'(x) = x \text{ に対し } X = X' \circ X \text{ であり } \int_{\mathbb{R}} X'(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

P' 上の T と X' に関する.

④ モーメント母関数と特性関数

Def (モーメント母関数)

$t \in \mathbb{R}$: パラメータ

X : r.v.

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[e^{tx}]$$

→ モーメント母関数 と書く。

Cor (モーメント母関数とモーメント)

$$\mu_j = E[X^j] \quad (j=0, 1, 2, \dots) : j\text{-次モーメント}$$

$$M(t) = E[e^{tx}] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mu_j \quad (\text{テイラー展開})$$

と書ける。

$$\leftarrow E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} |X|^j\right] < \infty \text{ とする}$$

$$M(0) = 1, \quad M'(0) = \mu, \quad M''(0) = \mu_2, \quad \dots, \quad M^{(k)}(0) = \mu_k$$

⇒ M を微分して $t=0$ を代入すれば、 k -次モーメントが得られる。

注: e^{tx} は必ずしも 積分可能 ではない。

Def (特性関数)

t : パラメータ

X : r.v.

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} E[e^{itx}] = E[\cos(tx)] + i E[\sin(tx)]$$

を 特性関数 (characteristic function) と呼ぶ。

$$|\phi(t)| \leq 1 : \text{可積分}$$

→ 任意の t に対して特性関数の値が確定する

Cor (特性関数とモーメント)

ある k (自然数) で $E[|X|^k] < \infty$ とする. ($\mu_k = E[X^k]$ が存在)

$$\phi^{(k)}(t) = E[(iX)^k e^{itX}] \quad (\phi \text{ の } k \text{ 回微分})$$

$$\phi^{(k)}(0) = E[(iX)^k] = i^k \mu_k$$

よって. $\mu_k = \frac{\phi^{(k)}(0)}{i^k}$

特に. $E[X] = \frac{\phi'(0)}{i}$

$$\text{Var}[X] = -\phi''(0) + \phi'(0)^2 \\ (= \mu_2 - \mu_1^2) \quad //$$

※ 本当は積分と微分の交換には条件が必要だが. 上記の条件では OK.

(ある可積分な Z が存在して $|\frac{\partial}{\partial t} g(t, X)|_{t=t_0} \leq Z$ ($t_0 - \epsilon \leq t \leq t_0 + \epsilon$) $\epsilon > 0$)

のとき. $\frac{\partial}{\partial t} E[g(t, X)]|_{t=t_0} = E[\frac{\partial}{\partial t} g(t, X)|_{t=t_0}]$ とする.)

Cor (特性関数の性質)

(1) $\phi(0) = 1$, $|\phi(t)| \leq 1$, $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$

(2) $\overline{\phi(t)}$ は $-X$ の特性関数

(3) $\phi(t)$ は \mathbb{R} 上の連続関数 ← 優収束定理

(4) $Y = aX + b$ とし. X と Y の特性関数を $\phi_X(t)$, $\phi_Y(t)$ とすると.

$$\phi_Y(t) = E[e^{it(aX+b)}] = e^{itb} \phi_X(at)$$

Ex. (正規分布の特性関数)

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \exp(itx) dx \\ &= \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2) \quad \leftarrow 2-2-1 \text{の積分定理}\end{aligned}$$

$$\phi'(t) = (i\mu - \sigma^2 t) \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= -\sigma^2 \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2) \\ &\quad + (i\mu - \sigma^2 t)^2 \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)\end{aligned}$$

Ex.

$$\begin{cases} \phi'(0) = i\mu \\ \phi''(0) = -\sigma^2 - \mu^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E[X] = \frac{\phi'(0)}{i} = \mu \\ \text{Var}[X] = -(-\sigma^2 - \mu^2) - \mu^2 \\ = \sigma^2 \end{cases}$$

Ex. (二項分布)

$$f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{x=0}^n e^{itx} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (e^{it}\theta)^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= (e^{it}\theta + (1-\theta))^n\end{aligned}$$

$$\phi'(0) = n\theta i \Rightarrow E[X] = \frac{\phi'(0)}{i} = n\theta$$

$$\phi''(0) = -\theta^2 n(n-1) - \theta n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{Var}[X] &= -\phi''(0) + \phi'(0)^2 \\ &= \theta^2 n(n-1) + \theta n - (n\theta)^2 \\ &= n\theta(1-\theta)\end{aligned}$$

Def (モーメント母関数)

X : r.v., $\phi(t)$: X の特性関数

$$\psi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \phi(t) \quad (\ln: \text{自然対数, } \ln e = 1)$$

ψ はモーメント母関数と呼ぶ

$$\psi(t) = \ln \phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} k_j$$

と展開した時、 k_j は j 番目のモーメント と呼ぶ
(j 次モーメント)

Cor (モーメント母関数とモーメントの関係)

s : 自然数

$$\psi^{(s)}(0) = i^s k_s \quad \text{より}$$

$$k_s = \frac{\psi^{(s)}(0)}{i^s}$$

Cor (平均値まわりのモーメントとモーメントの関係)

$$\psi(t) = \ln E[e^{itX}]$$

$$= \ln E[e^{it(X-\mu) + it\mu}]$$

$$= it\mu + \ln \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} V_j \right) \quad (V_j = E[(X-\mu)^j])$$

$$1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} V_j}_{(*)} \quad (\because V_1 = 0)$$

$$= it\mu + (*) - \frac{1}{2} (*)^2 + \frac{1}{3} (*)^3 + \dots \quad \left(\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \right)$$

$$= it\mu + \frac{(it)^2}{2!} V_2 + \frac{(it)^3}{3!} V_3 + \frac{(it)^4}{4!} V_4 + \frac{(it)^5}{5!} V_5 + \frac{(it)^6}{6!} V_6 + \dots$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{(it)^4}{2!2!} V_2 V_2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(it)^5}{2!3!} V_2 V_3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(it)^6}{3!3!} V_3 V_3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(it)^6}{2!4!} V_2 V_4 \dots$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{(it)^6}{2!2!2!} V_2 V_2 V_2 + \dots$$

Cor (平均値まわりの $\tau - \mu = t$ と $\tau_2 = \mu + t$ の関係)

$$\psi(t) = \ln E[e^{itx}]$$

$$= \ln E[e^{it(x-\mu) + it\mu}]$$

$$= it\mu + \ln \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} V_j \right) \quad (V_j = E[(X-\mu)^j])$$

$$1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} V_j}_{(*)} \quad (\because V_1 = 0)$$

$$= it\mu + (*) - \frac{1}{2} (*)^2 + \frac{1}{3} (*)^3 + \dots \quad \left(\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \right)$$

$$= it\mu + \frac{(it)^2}{2!} V_2 + \frac{(it)^3}{3!} V_3 + \frac{(it)^4}{4!} V_4 + \frac{(it)^5}{5!} V_5 + \frac{(it)^6}{6!} V_6 + \dots$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{(it)^4}{2!2!} V_2 V_2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(it)^5}{2!3!} V_2 V_3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(it)^6}{3!3!} V_3 V_3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(it)^6}{2!4!} V_2 V_4 \dots$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{(it)^6}{2!2!2!} V_2 V_2 V_2 + \dots$$

$t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6$ の係数を比較すると

$$k_1 = \mu$$

$$k_4 = V_4 - 3V_2^2$$

$$k_2 = V_2 = \sigma^2$$

$$k_5 = V_5 - 10V_2V_3$$

$$k_3 = V_3$$

$$k_6 = V_6 - 10V_3^2 - 15V_2V_4 + 30V_2^3$$

Def (歪みと尖り)

歪み (skewness)

$$\beta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_3}{k_2^{3/2}} = \frac{V_3}{\sigma^3}$$

尖り (kurtosis)

$$\beta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_4}{k_2^2} = \frac{V_4 - 3V_2^2}{\sigma^4}$$

Ex. (正規分布の歪みと尖り)

$$\psi(t) = \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

$$\psi(t) = it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \rightarrow \begin{cases} \psi'(t) = i\mu - \sigma^2 t \\ \psi''(t) = -\sigma^2 \\ \psi^{(k)}(t) = 0 \quad (k \geq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \mu \\ k_2 = \sigma^2 \\ k_3 = k_4 = k_5 = \dots = 0 \end{cases}$$

演習問題

ヒント: 優収束定理

(1) X_n : i.i.d. $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|] < \infty$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] = E[\sum_{n=1}^{\infty} X_n]$ を示せ.

(2) $P(0 \leq X < \infty) = 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} n E\left[\frac{1}{X} \mathbb{1}_{[X > n]}\right] = 0$ を示せ.

(3) 優収束定理を用いて, 本文中の微分と積分の交換可能性を示せ.

ヒント: $f(t, x)$ が $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ で偏1階微分可能ならば,

$\alpha \forall h < \varepsilon$ とき, $\exists \theta \in [0, 1]$ とき,

$$\frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} = \frac{\partial}{\partial t} f(t + \theta h, x)$$

$$\text{よって, } \forall \varepsilon > 0, \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} f(t + \theta h, x) \right| \leq \varepsilon$$

を用いて, 優収束定理を適用する.

(4) 一様分布の特性関数を求めよ.

特性関数を用いて平均と分散を求めよ.

(5) 正規分布の特性関数を導出せよ.

(6) p.d.f. が $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) である分布の特性関数を求めよ.

(7) e^{-x} 母関数の収散割合を示せ.

(8) 特性関数の連続性 ($\phi(t_n) \rightarrow \phi(t)$ if $t_n \rightarrow t$) を示せ.

ヒント: 優収束定理

(9) X_1, X_2, \dots, X_{n+1} が2乗可積分の時,

$X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$ とき X_{n+1} を線形予測の最小2乗解を求めよ.

つまり,

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i - X_{n+1}\right)^2\right]$$

を最小にする $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ を求めよ. (解は1つとは限らない)