# 確率数理工学6

## 特性関数の性質

**Thm**（分布関数と特性関数の関係）重要

2つの分布関数 $F_1, F_2$ に対して、
その特性関数を $\phi_1, \phi_2$ とする。

$F_1$ と $F_2$ が等しい（$F_1(x) = F_2(x)$ $({}^\forall x \in \mathbb{R})$）

$\iff$ $\phi_1$ と $\phi_2$ が等しい（$\phi_1(t) = \phi_2(t)$ $({}^\forall t \in \mathbb{R})$）

（$\Rightarrow$ は自明、$\Leftarrow$ は非自明）

☆ 分布の等しさを、ある関数クラスの期待値の等しさで測る。

$$\underbrace{\int e^{itx}\, dF_1(x) = \int e^{itx}\, dF_2(x)} \quad ({}^\forall t \in \mathbb{R})$$

これらより、全てのモーメントが等しければ分布が等しいこともわかる。

（c.f. ベクトル $x$ と $x'$ が等しい $\iff$ $\langle x, y\rangle = \langle x', y\rangle$ $({}^\forall y \in \mathbb{R}^d)$）

より強く以下のことが言える。

**Thm**（Lévyの反転公式）

$$P(X \in (a,b)) + \frac{1}{2}\left(P(X=a) + P(X=b)\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi} \phi(\xi)\, d\xi$$

（c.f. フーリエ逆変換. $P(X \in (a,b))$ が $b$ で微分可能なら、両辺 $b$ で微分してみる）

先の定理をLévyの反転公式を用いて示す。

$\Leftarrow$ を示す。

$a, b$ が $F$ の連続点なら、$P(X=a)=P(X=b)=0$ で

$$F(b)-F(a)=P(X\in(a,b))$$

となる。よって、$\phi_1=\phi_2$ なら、$F_1$ と $F_2$ が同時に連続である点 $x, x'\in\mathbb{R}$ において

$$F_1(x)-F_1(x')=F_2(x)-F_2(x')$$

である。さらに、不連続点は高々可算個なので、$x'$ はいくらでも大きくできて、$x'\longrightarrow-\infty$ とすれば分布関数の性質より

$$F_1(x)=F_2(x)\qquad(x \text{ は } F_1, F_2 \text{ の連続点})$$

を得る。

次に任意の $x\in\mathbb{R}$ (不連続点でも良い) を固定すると、

$\forall n>0$ で $|x-x_n|\leqq\frac{1}{n}$ かつ $x\leqq x_n$ であり、$x_n$ で $F_1$ と $F_2$ が連続であるような点 $x_n$ が存在する。つまり

$$F_1(x_n)=F_2(x_n)$$

とできる。

すると、$F_1$ と $F_2$ の右連続性より、

$$F_1(x)\underset{\text{右連続性}}{=}\lim_{n\to\infty}F_1(x_n)=\lim_{n\to\infty}F_2(x_n)\underset{\text{右連続性}}{=}F_2(x)$$

を得る。 //

# Lévyの反転公式の証明

Rを止めた時の右辺の積分

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left(\frac{e^{-i\xi b}-e^{-i\xi a}}{-i\xi}\right)\left(\int e^{i\xi x}dF(x)\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dF(x)\left(\int_{-R}^{R}\frac{e^{-i\xi(b-x)}-e^{-i\xi(a-x)}}{-i\xi}d\xi\right) \qquad (\text{Fubini})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dF(x)\int_{-R}^{R}\left\{\frac{\cos(\xi(x-b))-\cos(\xi(x-a))}{-i\xi} - \frac{\sin(\xi(x-b))-\sin(\xi(x-a))}{\xi}\right\}d\xi$$

（注：$\dfrac{\cos(\xi(x-b))-\cos(\xi(x-a))}{\xi}$，$\dfrac{\sin(\xi(x-b))-\sin(\xi(x-a))}{\xi}$ はともに有界

$\xi\to 0$ においても $\hookrightarrow$ これは $(x-b)\sin(\xi(x-b)) - (x-a)\sin(\xi(x-a))$ に収ま）

ロピタル

ここで、$\dfrac{\cos(\xi(x-b))-\cos(\xi(x-a))}{\xi}$ は奇関数なので積分は0

よって、$f_R(x) = \displaystyle\int_0^R \frac{\sin(\xi x)}{\xi}d\xi \quad (x\in\mathbb{R})$ とすると、

$$\text{右辺} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int dF(x)\left(f_R(x-a)-f_R(x-b)\right)$$

ここで、

$$\lim_{R\to\infty} f_R(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(\xi)}{\xi}d\xi = \frac{\pi}{2} & (x>0) \\ -\dfrac{\pi}{2} & (x<0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

より、

$$\frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\lim_{R\to\infty}\int f_R(x-a)-f_R(x-b)\,dF(x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\lim_{R\to\infty}\left(f_R(x-a)-f_R(x-b)\right)dF(x) \qquad (\text{優収束定理})$$

積分の中身は有界

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int\left(\mathbb{1}\{x>a\}-\mathbb{1}\{x<a\}\right)-\left(\mathbb{1}\{x>b\}-\mathbb{1}\{x<b\}\right)dF(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(2\,\mathbb{1}\{a<x<b\}+\mathbb{1}\{x=a\}+\mathbb{1}\{x=b\}\right)dF(x)$$

$$= \int \mathbb{1}\{a<x<b\}\, dF(x) + \frac{1}{2}\int \mathbb{1}\{x=a\}\, dF(x) + \frac{1}{2}\int \mathbb{1}\{x=b\}\, dF(x)$$

$$= P(a<X<b) + \frac{1}{2}\left(P(X=a)+P(X=b)\right)$$

定義関数の期待値.

※分布の性質を調べたければ特性関数の性質を調べれば良い.

**Thm** (独立な確率変数の和の特性関数) ※重要!

$X_1, \dots, X_n$ : 互いに独立な r.v.

$\phi_j(t)$ : $X_j$ の特性関数 $(j=1,2,\dots,n)$

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$S_n$ の特性関数は

$$\phi(t) = \phi_1(t)\cdot\phi_2(t)\cdots\cdots\phi_n(t)$$

で与えられる.

(和の特性関数は、特性関数の積)

**Proof**

$$\phi(t) = E\left[e^{it(X_1+\cdots+X_n)}\right] = E\left[e^{itX_1}\cdots\cdots e^{itX_n}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} E\left[e^{itX_j}\right] = \phi_1(t)\times\cdots\times\phi_n(t)$$

独立性

**Thm** (独立性と特性関数) ←特性関数と分布の一対一対応

$X_1, \dots, X_n$ : r.v.

同時分布の特性関数 : $\phi(t_1,\dots,t_n) \overset{def}{=} E\left[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right]$

$\phi_j$ : $X_j$ の c.f. (特性関数)

$X_1,\dots,X_n$ が独立 $\iff \phi(t_1,\dots,t_n) = \phi_1(t_1)\cdots\phi_n(t_n)$

例

**Ex.** (二項分布)

$X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(\theta)$ $\left( P(X_i=1)=\theta,\ P(X_i=0)=1-\theta \right)$
(i.i.d.)

$S = X_1 + \cdots + X_n$ とする。

$$\begin{cases} X_i \text{の特性関数} : \theta e^{it} + (1-\theta) \\ S \text{の} \quad \text{〃} \quad : \left(\theta e^{it} + (1-\theta)\right)^n \end{cases}$$

前回の講義

⇝ 二項分布の特性関数

$\Longrightarrow S \sim B(n, \theta)$ (二項分布)

**Ex.** (正規分布の和の分布)

$X_1, \ldots, X_n$ : r.v. , 独立

$X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$S_n$ の c.f. 　$X_j$ の c.f.

$$\phi(t) = \prod_{j=1}^{n} \phi_j(t)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \exp\left(it\mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2 t^2\right)$$

$$= \exp\left(it\bar{\mu} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 t^2\right)$$

ただし、$\bar{\mu} = \mu_1 + \cdots + \mu_n$, $\bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$

よって、 $S_n \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$ : 正規分布の再生性

⟶ 和の分布がすぐに求まる。

# 様々な分布

○ 連続な分布

- 指数分布 （$Ex(\lambda)$）

p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

（$\lambda > 0$：パラメータ）

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda x}$$

〜 単位時間にある事象が平均$\lambda$回発生するとして、その事象の発生間隔の分布
（ポアソン分布と関係）

特性関数 $\phi(t) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{ixt} dx$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$

キュムラント母関数

$$\psi(t) = \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right) = -\ln\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)$$

$$\psi'(t) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$\psi''(t) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^2\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-2}$$

$$\begin{cases} \psi'(0) = \frac{i}{\lambda} & \longrightarrow & \kappa_1 = \frac{1}{\lambda} = \mu & \text{（平均）} \\ \psi''(0) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)^2 & \longrightarrow & \kappa_2 = \frac{1}{\lambda^2} & \text{（分散）} \\ \psi^{(3)}(0) = 2\left(\frac{i}{\lambda}\right)^3 & \longrightarrow & \kappa_3 = \frac{2}{\lambda^3} & \\ \psi^{(4)}(0) = 3!\left(\frac{i}{\lambda}\right)^4 & \longrightarrow & \kappa_4 = \frac{6}{\lambda^4} & \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 6$

（$\lambda$によらない）

## − ガンマ分布 $(G(\lambda, k))$

p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

Note $\Gamma(s) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ : ガンマ関数

$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

$n$が自然数のとき、$\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) \cdots \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

特性関数

$$\phi(t) = \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} e^{ixt} dx$$

$$= \frac{\lambda^k}{(\lambda - it)^k} \cdot \frac{1}{\Gamma(k)} \cdot \int_0^\infty ((\lambda - it)x)^{k-1} e^{-(\lambda - it)x} (\lambda - it) dx$$

$$= \frac{\lambda^k}{(\lambda - it)^k} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-k}$$

$X_j \sim Ex(\lambda)$ $(j = 1, \cdots, k)$ 互いに独立 とおくと

$S_k = X_1 + \cdots + X_k$ の c.f. は

$\phi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-k}$ : ガンマ分布 $G(\lambda, k)$ の特性関数

→ 単位時間あたり平均$\lambda$回発生する事象が
$k$回起きるまでの時間 (指数分布の和はガンマ分布)

キュムラント母関数 $\psi(t) = -k \ln\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)$

$\kappa_1 = \frac{k}{\lambda}$　　$\kappa_3 = \frac{2k}{\lambda^3}$

$\kappa_2 = \frac{k}{\lambda^2}$　　$\kappa_4 = \frac{6k}{\lambda^4}$

$\rightarrow$ $\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{k}}$, $\beta_2 = \frac{6}{k}$

$k \to \infty$で

$\beta_1 \to 0$, $\beta_2 \to 0$

(正規分布に近づく)

$\frac{X - \frac{k}{\lambda}}{\sqrt{k/\lambda^2}} \xrightarrow{w} N(0, 1)$

- $\chi^2$分布（カイ2乗分布）

$G\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ を自由度 $n$ の $\chi^2$-分布と言う。

統計でよく現れる。

使い所：（正規分布と $\chi^2$分布の関係）

$X \sim N(0,1)$：標準正規分布

$Y = X^2$ の分布は $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ に従う

--- 自由度1の $\chi^2$分布

$X_j \sim N(0,1)$ $(j=1, \dots, k)$ (i.i.d.) なら

$Y = X_1^2 + \cdots + X_k^2$ は $G\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)$ に従う。

--- 自由度 $k$ の $\chi^2$分布

(Proof) ・ $k=1$ のとき。 $X \sim N(0,1)$ なら

標準正規分布のp.d.f.

$$F(y) = P(X^2 \leqq y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{y}} p(x)\,dx$$

$$f(y) = \frac{d}{dy}F(y) = \frac{d}{dy}\left(2\int_0^{\sqrt{y}} p(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{d\sqrt{y}}{dy} \cdot 2p(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sqrt{y}^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}$$

$\longrightarrow G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ の p.d.f.

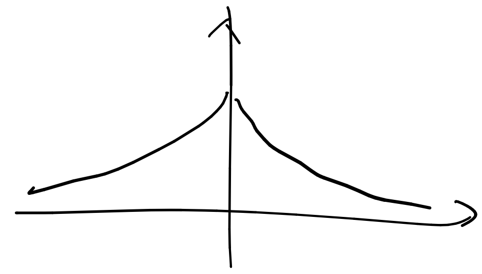
・ $k > 1$ のとき。

$Y = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ の特性関数：

$$\phi(t) = \left[\left(1 - 2it\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^k = (1 - 2it)^{-\frac{k}{2}}$$

$\Longrightarrow G\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2}\right)$ の特性関数：自由度 $k$ の $\chi^2$分布

## – Cauchy分布（コーシー分布）



p.d.f. $\quad f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$

$$E[|x|] = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{a^2+x^2}dx$$

$$= \frac{2a}{2\pi}\left[\ln(a^2+x^2)\right]_0^{\infty}$$

$\longrightarrow$ 有限に確定しない

$E[X]$は存在しない（非可積分）

c.f. : $\phi(t) = \exp(-a|t|)$

## – ベータ分布（$Be(a,b)$）

p.d.f. $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & (0<x<1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

$a, b$はパラメータ（形状母数）

Note $\quad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ : ベータ関数

平均 : $\mu = \frac{a}{a+b}$

分散 : $\sigma^2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

実は $\quad X \sim G(a,1),\ Y \sim G(b,1) \Longrightarrow \frac{X}{X+Y} \sim Be(a,b)$
（独立）

$\Longrightarrow$ 2項分布の事前分布に使われたりする.

○ 離散分布

- 二項分布 (省略)

- Poisson分布 ($P_o(\lambda)$)

$\sum_{x=0}^{\infty} f(x)=1$ をチェックせよ

p.m.f. $f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

$(x=0,1,2,\ldots)$

特性関数

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \exp\left(\lambda (e^{it}-1)\right)$$

キュムラント母関数

$$\psi(t) = \ln \phi(t) = \lambda(e^{it}-1)$$

$$\psi'(t) = i\lambda e^{it}$$
$$\psi''(t) = (i)^2 \lambda e^{it}$$
$$\psi^{(k)}(t) = (i)^k \lambda e^{it}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} K_1 = \lambda \\ K_2 = \lambda \\ \vdots \\ K_k = \lambda \quad (\forall k) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\lambda}$$

事象の発生間隔が指数分布に従うとき、

単位時間あたりに発生する事象の数の分布

$X_1, X_2, \ldots$ : 独立な指数分布 ($E_x(\lambda)$)、客の到着間隔

客が $k$人以上来た : $X_1 + \cdots + X_k \leqq 1$

つまり、$Y \sim G(\lambda, k)$ として $Y \leqq 1$ である確率

事象の発生間隔が指数分布に従うとき、

単位時間あたりに発生する事象の数の分布

$X_1, X_2, \ldots$：独立な指数分布 $(Ex(\lambda))$、客の到着間隔

客が $k$人以上来た：$X_1 + \cdots + X_k \leqq 1$

つまり、$Y \sim G(\lambda, k)$ として $Y \leqq 1$ である確率

$$\int_0^1 \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\lambda y} dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} y^{k-1} \frac{d}{dy}\left(e^{-\lambda y}\right) dy$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\lambda y}\right]_0^1}_{= -\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda}} + \int_0^1 \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda y} y^{k-2} dy$$

$\vdots$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = 1 - \underbrace{F(k-1)}_{\text{Poisson分布の分布関数}}$$

つまり $P(k\text{人以上}) = 1 - F(k-1)$

$\Longrightarrow P(k-1\text{人以下}) = F(k-1)$ ：Poisson分布

//

## 負の二項分布（NB(k, θ)）

コイン投げをして、k回表が出るまでに裏が出る回数(x)の分布

（ただし、その1回前までは裏x回、表k−1回とする）

k=1のとき、$NB(1,\theta)=G(\theta)$：幾何分布と言う

一般のとき、p.m.f

$$f(x)=\binom{k+x-1}{k-1}\theta^{k-1}(1-\theta)^x\underbrace{\theta}_{\text{最後に表が出る}}$$

$$=\binom{k+x-1}{k-1}\theta^{k}(1-\theta)^x$$

特性関数

$$\phi(t)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{itx}\binom{k+x-1}{k-1}\theta^k(1-\theta)^x$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k+x-1}{k-1}\theta^k\left(e^{it}(1-\theta)\right)^x$$

ここで、

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^k=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{k(k+1)\cdots(k+x-1)}{x!}z^x$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k+x-1}{k-1}z^x$$

より、

$$\phi(t)=\theta^k\left(1-e^{it}(1-\theta)\right)^{-k}$$ である。

$$\psi(t)=\ln(\phi(t))=k\ln(\theta)-k\ln\left(1-e^{it}(1-\theta)\right)$$

$$\psi'(t)=-k\frac{-i(1-\theta)e^{it}}{1-e^{it}(1-\theta)}\xrightarrow[t=0]{}\mu=k\frac{1-\theta}{\theta}$$

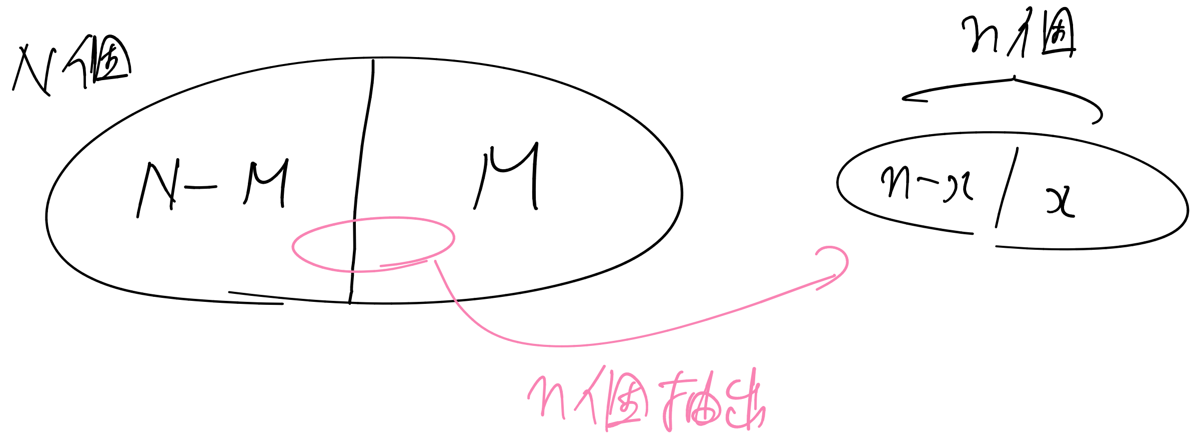
$$\psi''(t)=k\frac{i^2(1-\theta)e^{it}}{(1-e^{it}(1-\theta))^2}\xrightarrow[t=0]{}\sigma^2=k\frac{1-\theta}{\theta^2}$$

（θが小さいと大きい）

例：クーポンコレクター問題、コンプガチャ

## — 超幾何分布 $(H(n, N, M))$

N個のアイテムにM個の不良品が入っているとき、n個を非復元抽出した時、そのn個にx個の不良品が入っている確率




p.m.f. $$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

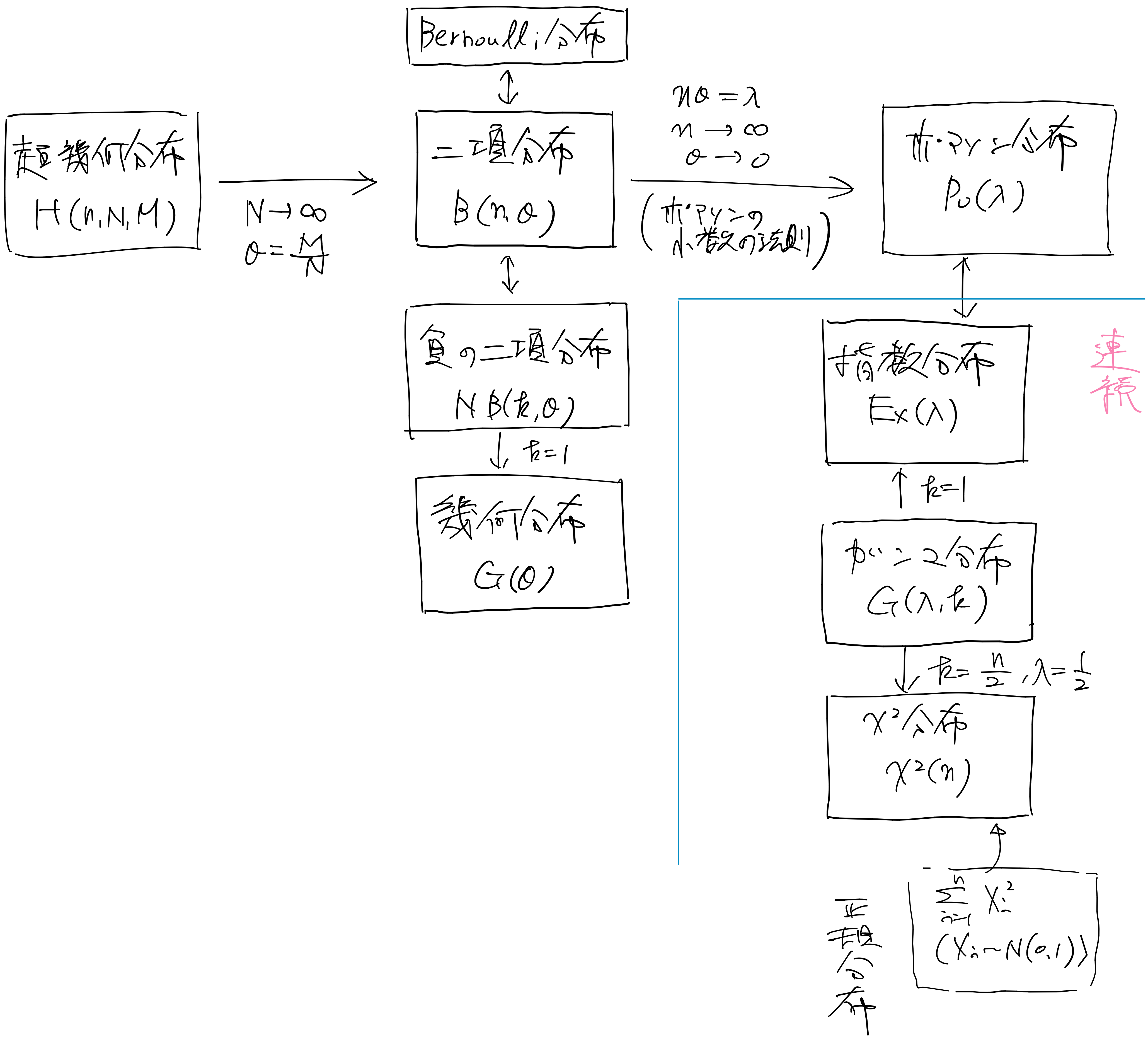
$\theta = \frac{M}{N}$ として、$N \to \infty$ とすると. ($\theta$は固定)

$$\longrightarrow \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$ (二項分布)

$$\left( f(x) = \frac{\dfrac{M(M-1)\cdots(M-x+1)}{x!} \cdot \dfrac{(N-M)(N-M-1)\cdots(N-M-n+x+1)}{(n-x)!}}{\dfrac{N \cdots (N-n+1)}{n!}} \right.$$

$$= \binom{n}{x} \frac{\frac{M}{N} \cdot \left(\frac{M}{N} - \frac{1}{N}\right) \cdots\cdots \left(\frac{M}{N} - \frac{x-1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{M-1}{N}\right) \cdots \left(1 - \frac{M+n-x-1}{N}\right)}{1 \times \left(1 - \frac{1}{N}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)}$$

$$\left. \xrightarrow[\substack{N \to \infty \\ M \to \infty \\ (\frac{M}{N} = \theta)}]{} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \right)$$


Bernoulli分布
超幾何分布
H(n,N,M)
N→∞
θ=M/N
二項分布
B(n,θ)
nθ=λ
n→∞
θ→0
(ポアソンの小数の法則)
ポアソン分布
Po(λ)
負の二項分布
NB(k,θ)
k=1
幾何分布
G(θ)
連続
指数分布
Ex(λ)
k=1
ガンマ分布
G(λ,k)
k=n/2, λ=1/2
χ²分布
χ²(n)
Σ_{i=1}^{n} X_i²
(X_i~N(0,1))
正規分布

# 演習問題

(1) $X_1, \dots, X_n$：独立.

$\psi_i$：$X_i$ のキュムラント母関数

$S = X_1 + \cdots + X_n$ のキュムラント母関数は

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \cdots + \psi_n(t)$$

であることを示せ.

このことより，$S$ の $j$ 次キュムラントは

$$K_j = K_j^{(1)} + \cdots + K_j^{(n)}$$

（$K_j^{(i)}$ は $X_i$ の $j$ 次キュムラント）

であることを確かめよ.

(2) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が下半連続とは $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$ （$\forall x \in \mathbb{R}^d$）

をみたすことである.（同様に $f$ が上半連続 $\Longleftrightarrow$ $-f$ が下半連続）

このとき，

$f$ が下半連続 $\Longleftrightarrow$ $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$ が閉集合 （$\forall a \in \mathbb{R}$）

を示せ. これを用いて，下半連続または上半連続な関数は可測であることを示せ.

(3) $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の可測関数の集合は，単関数を含みかつ各点収束に関して閉じている最小の関数クラスであることを示せ.

(4) $\sigma(X)$ を，$X$ を可測にする最小の $\sigma$-加法族とする.（$X : \Omega \to \mathbb{R}$）

つまり，$\sigma\left(X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))\right) = \sigma\left(\{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\right)$.

このとき，$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ が可測 $\to \sigma(X)$-可測 であるための必要十分条件は，ある可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いて $Y = f(X)$ と書けることであることを示せ.

(15) $X$の特性関数の値$\phi(t)$が$\forall t \in \mathbb{R}$で実数

$\iff$ $X$と$-X$は同じ分布

(16) 特性関数$\phi$が$\int |\phi(t)| dt < \infty$のとき.

その分布は密度関数 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \phi(t) dt$ をもつことを

示せ.

(17) 一様分布$U([a,b])$の特性関数を求めよ.

(18) $X \sim U([-1,1])$, $Y \sim U([-1,1])$ (独立)

のとき. $Z = X+Y$の特性関数を求めよ.

また. $Z = X+Y$の分布の確率密度関数を求めよ.

(19) $X, Y$: 独立

このとき. $X+Y$と$X$が同じ分布であるなら

$Y = 0$ (a.s.) であることを示せ.

(20) 独立なr.v. $X, Y, Z$で,

$X+Y$の分布と$X+Z$の分布は等しいが.

$Y$と$Z$の分布は等しくない.

という例を示せ.