

# 演習問題

(1)  $X_n \xrightarrow{P} X$  ならば、ある部分列  $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  が存在し、

$X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$  と示すことを示せ。

(ヒント: Borel-Cantelli の補題: 1.19)

(2)  $(X_n)$  が 確率収束の意味の  $\mathcal{C}-\mathcal{C}$ -列 (2.2-in prob.)  
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$  に対し、 $\exists N \in \mathbb{N}$  として  

$$P(|X_n - X_m| \geq \varepsilon) \leq \delta \quad (\forall n, m \geq N)$$
 とおける。

(a)  $X_n \xrightarrow{P} X$  ならば  $(X_n)_n$  は  $\mathcal{C}-\mathcal{C}$ -列 in prob. とおけることを示せ。

(b)  $(X_n)_n$  が  $\mathcal{C}-\mathcal{C}$ -in prob. のとき、ある r.v.  $X$  が存在し、

$X_n \xrightarrow{P} X$  とおけることを以下の手順で示せ:

(i) ある部分列  $(n_j)_{j=1}^{\infty}$  が存在し、

$$P(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}) < 2^{-j}$$

と示すことを示せ。

(ii)  $X_{n_j}$  は a.s.  $\mathcal{C}$ -収束することを示せ (ヒント: Borel-Cantelli)  
 その収束先を  $X$  とおく。 ( $X$  は可測)

(iii)  $X_n \xrightarrow{P} X$  を示せ。

(3)  $(X_n)_n$  が一様可積分  $\Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|X_n| \geq a} |X_n| dP \rightarrow 0$   
 とおける。

$(X_n)$  が一様可積分ならば、 $\sup_n E[|X_n|] < \infty$  とおけることを示せ。

(4)  $X_n$  が単調増大な r.v.  $\mathcal{C}$ 。  $X_n \xrightarrow{P} X$  とおける。

そのとき、 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$  とおけることを示せ。

(5)  $X_n \xrightarrow{p} X \iff$  任意の部分列  $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  必らずに子列  $(X_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$  を持ち、 $X_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.s.} X$  である。  
 このことを示せ。

(6)  $X_n \xrightarrow{p} X, Y_n \xrightarrow{p} Y$  のとき。

(a)  $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$  を示せ。

(b)  $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$  を示せ ((5) を用いて示す)

(7)  $(X_n)_n$  : i.i.d. のとき  $E[X_n] = \mu, \text{Var}[X_n] = \sigma^2$  (ここで有限) のとき。

$$\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$$

を示すことを示せ。

(8) 以下を示せ：

(a)  $X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \implies \bar{X}_n (= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) \xrightarrow{a.s.} 0$

(b)  $X_n \xrightarrow{L^p} 0 \implies \bar{X}_n \xrightarrow{L^p} 0$   
 ( $p \geq 1$ )

(c)  $X_n \xrightarrow{p} 0 \implies \bar{X}_n \xrightarrow{p} 0$  とは有限次元  $\mu$  への反例を  
 挙げ、示す。

(d)  $\bar{X}_n \xrightarrow{p} 0 \implies \frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0$

(9)  $S \subset \mathbb{R}^d$  をコンパクト集合とする。

(参考問題)

$S$  上のカウシ過程  $G_u (u \in S)$  とは、任意の有限個の

$\{u_1, \dots, u_k\} \subset S$  に対し、 $(G_{u_1}, \dots, G_{u_k})$  が多変量正規分布  
 に従うこととする。

ある2つの  $\mathcal{F}$  上の Gauss 過程  $G_u, G'_u$  が

$$(i) E[G_u] = E[G'_u] = 0 \quad (u \in \mathcal{F})$$

$$(ii) E[(G_u - G_v)^2] \leq E[(G'_u - G'_v)^2] \quad (u, v \in \mathcal{F})$$

をみたす。  $G_u, G'_u$  は  $\mathcal{F}$  上の a.s. 2- $u$  に関する有界かつ連続な関数と見做す。このとき

$$E\left[\sup_{u \in \mathcal{F}} G_u\right] \leq E\left[\sup_{u \in \mathcal{F}} G'_u\right]$$

を示すことが知られている。(Stein の不等式)

今  $\mathcal{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  上の単位球面 ( $\mathcal{S}^{d-1} = \{ \|x\| = 1 \mid x \in \mathbb{R}^d \}$ ) とする。

$(A_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d}$  を  $A_{ij}$  が i.i.d.  $N(0, 1)$  に従うランダム行列とす。

ある  $u \in \mathcal{S}^{d-1}, v \in \mathcal{S}^{d-1}$  とする。

$$G_{(u,v)} := u^T A v$$

とする。一方  $g, g' \in \mathbb{R}^d$  は独立な  $\mathbb{R}^d$ -値 r.v. とし、 $g \sim N(0, I), g' \sim N(0, I)$  (多変量正規分布) とする。

$$G'_{(u,v)} := u^T g + v^T g'$$

と見做す。

$$E\left[\sup_{(u,v) \in \mathcal{S}^{d-1} \times \mathcal{S}^{d-1}} G_{(u,v)}\right] \leq E\left[\sup_{(u,v) \in \mathcal{S}^{d-1} \times \mathcal{S}^{d-1}} G'_{(u,v)}\right]$$

を示す。まず

$$E[\|A\|] \leq 2\sqrt{d}$$

$$\begin{aligned} & \uparrow \\ & \text{operator-norm} \\ \|A\| &:= \sup_{\substack{u \in \mathcal{S}^{d-1} \\ v \in \mathcal{S}^{d-1}}} u^T A v \end{aligned}$$

を示す。

(10) (9) の設定で: Gaussian 集中不等式より

(参考問題)  $P(\|A\| \geq 2\sqrt{d} + t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (t > 0)$

を示せ. (ランダム行列の作用素ノルム)

(11)  $X_i$  を i.i.d., 非負の r.v. とする.

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i \quad \text{と} \text{する.}$$

(a)  $P(M_n > x) \leq n P(X_1 > x) \quad (x > 0)$  を示せ.

(b)  $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \iff n P(X_1 > n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

を示せ.