

# 補足資料：確率測度の一意性と構成

- Dynkinの $\pi$ - $\lambda$ 定理：ある集合族 $\mathcal{C}$ 上での同じ確率を与える2つの確率測度は、その集合族で生成される $\sigma$ -加法族上でも一致する。

応用例：同じ分布関数を持つ測度は $B(\mathbb{R})$ 上で一意  
→ 一意性

- Hopfの拡張定理：ある有限加法族上の確率測度は、その有限加法族を含む最小の $\sigma$ -加法族上の確率測度に拡張される。

→ 存在性

(もちろん、その拡張が一意であることも含めて Hopfの拡張定理と通常は言う。)

↳ 演習問題も参照

## - Dynkinの $\pi$ - $\lambda$ 定理

目標：今分布関数 $F$ が与えられたとき、対応する確率測度 $P$ が一意に定まることを示す。つまり、2つの確率測度 $P_1, P_2$ が

$$P_1((-\infty, a]) = P_2((-\infty, a]) = F(a) \text{ を満たすなら}$$

$P_1(A) = P_2(A) \quad (\forall A \in B(\mathbb{R}))$  となることを示す。(ただし、そのような測度が存在することは仮定)

↳ Hopfの拡張定理

## Def

•  $\pi$ -システム：集合族 $\mathcal{P}$ が $\pi$ -システム $\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{P}$  なら  $A \cap B \in \mathcal{P}$

(有限回の共通部分を取る操作は $\mathcal{P}$ を閉じなす)

•  $\lambda$ -システム：集合族 $\mathcal{L}$ が $\lambda$ -システム $\Leftrightarrow$

(Dynkin族)

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \Omega \in \mathcal{L} \\ (2) \quad A, B \in \mathcal{L}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L} \\ (3) \quad A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \in \mathcal{L} \\ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \end{array} \right.$$

⊗  $\sigma$ -加法族は $\pi$ -システムでも $\lambda$ -システムでもある。

$\mathcal{G}(P)$ :  $P$  を含む最小の  $\sigma$ -加族

$\mathcal{L}(P)$ :  $P$  を含む最小の  $\lambda$ -システム

### Thm (Dynkinの定理)

(1)  $P$  は  $\pi$ -システムで、 $\mathcal{L}$  は  $P$  を含む  $\lambda$ -システム ( $P \subset \mathcal{L}$ ) であるとする。  
すると、 $\mathcal{G}(P) \subset \mathcal{L}$  である。

(2)  $\pi$ -システム  $P$  に対し、

$$\mathcal{G}(P) = \mathcal{L}(P)$$

が成り立つ。

証明は後述とされる。 (1)  $\Rightarrow$  (2) は示さねばならない。仮定から、(1)より  $\mathcal{G}(P) \subset \mathcal{L}(P)$  は示さねばならない。任意の  $\sigma$ -加族は  $\lambda$ -システムでもあるのである。  $\mathcal{G}(P)$  は  $P$  を含む  $\lambda$ -システムでもある。つまり  $\mathcal{G}(P) \supset \mathcal{L}(P)$  が成り立つ。よって  $\mathcal{G}(P) = \mathcal{L}(P)$  である。

Dynkinの定理より、次の命題が示せる。

### Cor 1

$(\Omega, \mathcal{F})$  上の確率測度  $P_1, P_2$  が、ある  $\pi$ -システム  $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$  において、

$$\forall A \in \mathcal{P} \text{ として } P_1(A) = P_2(A)$$

をみたすならば、

$$\forall B \in \mathcal{G}(\mathcal{P}) \text{ として } P_1(B) = P_2(B)$$

が成り立つ。

さらに、この系として、分布関数が共通な2つの確率測度  $P_1, P_2$  が  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  上で一致するこを示せる。

### Cor 2

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  上の確率測度  $P_1, P_2$  が

$$P_1((-\infty, a]) = P_2((-\infty, a]) = F(a) \quad (\forall a \in \mathbb{R})$$

をみたすならば、 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  上で  $P_1 = P_2$  である。

### (Cor 2の証明)

$\mathcal{P} = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$  は  $\pi$ -システムである。仮定より、 $\forall A \in \mathcal{P}$  として  $P_1(A) = P_2(A)$  である。よって Cor 1 より  $P_1(B) = P_2(B)$  ( $\forall B \in \mathcal{G}(\mathcal{P})$ ) である。こゝで、

$\mathcal{G}(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  であることに注意すると、こゝでは  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  上で  $P_1 = P_2$  であることは他ならない。

# (Cor 1の証明)

まず:  $\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{F} \mid P_1(A) = P_2(A)\}$  とすると、 $\mathcal{L}$  は  $\lambda$ -システムとなることを示す。

(1)  $P_1(\Omega) = 1, P_2(\Omega) = 1$  より、 $\Omega \in \mathcal{L}$ 。

(2)  $A, B \in \mathcal{L}, A \subset B$  とすると、 $P_1(A) = P_2(A)$  より  $P_1(B) = P_2(B)$  である。  
確率測度の性質(加法性)より、

$$P_1(B \setminus A) = P_1(B) - P_1(A) = P_2(B) - P_2(A) = P_2(B \setminus A)$$

より、 $B \setminus A \in \mathcal{L}$  を得る。

(3)  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \in \mathcal{L}$  とする。確率の連続性より

$$P_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_2(A_n) = P_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

なので、 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$  である。

以上より、 $\mathcal{L}$  は  $\lambda$ -システムであることがわかる。

仮定より  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$  なので、Dynkinの定理より、 $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{L}$  である。

$\mathcal{L}$  上で  $P_1$  と  $P_2$  は一致するので、 $\sigma(\mathcal{F})$  上でも両者は一致する。

これから、Dynkinの定理を示すが、その前に次のことを注意しておく。

## Lem

$$\mathcal{L} \text{ が } \lambda\text{-システム} \iff \begin{cases} (1)' \Omega \in \mathcal{L} \\ (2)' A \in \mathcal{L} \implies A^c \in \mathcal{L} \\ (3)' A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m), A_n \in \mathcal{L} \text{ なら、} \\ \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \text{ である。} \end{cases}$$

## (証明) ( $\implies$ の示す)

(1)' は定義から自明。(2)' も  $\Omega \in \mathcal{L}$  なのだから  $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}$ 。より  $A^c \in \mathcal{L}$  である。

(3)' を示す。そのために、まずは  $A, B \in \mathcal{L}, A \cap B = \emptyset$  に対し、

$A \cup B \in \mathcal{L}$  であることを示す。(2)' より  $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}$  である。また  $B \subset \Omega \setminus A$  なのだから、

$(\Omega \setminus A) \setminus B \in \mathcal{L}$  であることを示す。すなわち  $(\Omega \setminus A) \setminus B = A^c \cap B^c$  なのだから、 $A^c \cap B^c \in \mathcal{L}$ 。

(2)' より、 $A^c \cap B^c \in \mathcal{L}$  なら  $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B \in \mathcal{L}$  である。



# (Dynkinの定理の証明)

証明の方針:  $\mathcal{L}(P)$  が  $\pi$ -システムであることを示す. 実は  $\lambda$ -システムが  $\pi$ -システムであるなら,  $\mathcal{G}$  は  $\sigma$ -加法族であることが示せる. つまり,  $\mathcal{G}(P) \subset \mathcal{L}(P)$  が成り立つ.

## Lem

ある集合族  $\mathcal{B}$  が  $\pi$ -システムでも  $\lambda$ -システムでもあるとき,  $\mathcal{B}$  は  $\sigma$ -加法族である.

## (証明)

(1)  $\Omega \in \mathcal{B}$  は  $\lambda$ -システムの定義より明らか.

(2)  $A \in \mathcal{B}$  なら  $A^c \in \mathcal{B}$  であることと性質 (2)' に従う.

(3) 有限和の  $\cup$  に関して示す.

$A, B \in \mathcal{L}$  とする.  $A$  と  $B$  は互いに疎であるとは限らないので.

(3)' を使えば,  $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ .  $\mathcal{B}$  は  $\pi$ -システムなので,  $A \cap B \in \mathcal{B}$  である.

よって,  $\lambda$ -システムの性質より  $A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{B}$ ,  $B \setminus (A \cap B) \in \mathcal{B}$  である.

また, (1), (2) より  $\phi = (\Omega)^c \in \mathcal{B}$  であるので.

$\lambda$ -システムの性質 (3)' より.

$$A \cup B = \underbrace{(A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B)}_{\text{互いに排反}} \cup \phi \cup \phi \dots$$

$\in \mathcal{B}$

である.  $n \geq 1$  から  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$  なら,  $(A_n \cap A_m = \phi$  (n ≠ m) と仮定する)

$\bigcup_{n=1}^m A_n \in \mathcal{B}$  である. よって.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left( \bigcup_{n=1}^m A_n \right)}_{A'_m \text{ とおく}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{A'_m}_{\mathcal{L} \text{ に含まれる}} \in \mathcal{B}$$

なお, 最後の  $\bigcup_{m=1}^{\infty} A'_m \in \mathcal{B}$  は  $A'_1 \subset A'_2 \subset \dots \in \mathcal{B}$  (性質 (3) を適用して).

以上より,  $\mathcal{B}$  は  $\sigma$ -加法族である. //

これは  $\mathcal{L}(P)$  が  $\pi$ -システムになることを示す。前の Lemma  $\mathcal{L}(P)$  が  $\sigma$ -代数族になることを示す。  $\mathcal{L}(P) \supset \sigma(P)$  であり、かつ、 $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{L}(P)$  の定義より、 $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}(P)$  である。よって、 $\mathcal{L} \supset \sigma(P)$  が従う。

$\mathcal{L}(P)$  が  $\pi$ -システムであることの証明:

$$\mathcal{G}_A := \{ B \in \sigma(P) \mid A \cap B \in \mathcal{L}(P) \} \quad \text{とす。}$$

(i)  $A \in \mathcal{L}(P)$  ならば  $\mathcal{G}_A$  は  $\lambda$ -システムである。

なせなら。

(1)  $\Omega \in \mathcal{G}_A$  ( $\because \Omega \cap A = A \in \mathcal{L}(P)$ )  $\swarrow$  A の仮定

(2)  $B \in \mathcal{G}_A$  ならば、 $A \cap B \in \mathcal{L}(P)$  であり、 $A \in \mathcal{L}(P)$  であることと合わせて、 $A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c \in \mathcal{L}(P)$  である。つまり、 $B^c \in \mathcal{G}_A$  である。

(3)  $B_n \in \mathcal{G}_A$  が互いに排反であるとする。  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_A$  を示す。

$A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$  であるから、 $B_n \in \mathcal{G}_A$  より、 $A \cap B_n \in \mathcal{L}(P)$  である。よって、 $(A \cap B_n)_{n=1}^{\infty}$  は互いに排反であるので、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) \in \mathcal{L}(P). \quad \text{つまり、} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_A \quad \text{である。}$$

よって  $\mathcal{G}_A$  は  $\lambda$ -システムである。

(ii)  $A \in \mathcal{P}$  ならば  $\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{G}_A$  である。

なせなら、まず  $A \in \mathcal{L}(P)$  であることから (i) より  $\mathcal{G}_A$  は  $\lambda$ -システムであることに注意す。今、 $\mathcal{P}$  は  $\pi$ -システムなので、 $\forall B \in \mathcal{P}$  は  $B \cap A \in \mathcal{P}$  である。つまり、

$\forall B \in \mathcal{P}$  は  $B \in \mathcal{G}_A$  である ( $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$ )。よって  $\mathcal{G}_A$  は  $\mathcal{P}$  を含む  $\lambda$ -システムなので、 $\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{G}_A$  である。



このことから、 $A \in \mathcal{P}$ ,  $B \in \mathcal{L}(P)$  に対し、 $A \cap B \in \mathcal{L}(P)$  である。

よって  $A \in \mathcal{L}(P)$  かつ  $B \in \mathcal{L}(P)$  なら、

(iii)  $A \in \mathcal{L}(P)$  ならば、 $\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{G}_A$  である。

なせなら、(ii) より、 $\forall B \in \mathcal{P}$  に対し、 $A \cap B \in \mathcal{L}(P)$  であることは示した。よって、 $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$  である。また (i) より  $A \in \mathcal{L}(P)$  ならば  $\mathcal{G}_A$  は  $\lambda$ -システムなので、

$\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{G}_A$  である。よって、 $A \in \mathcal{L}(P)$  ならば、 $\forall B \in \mathcal{L}(P)$  で  $A \cap B \in \mathcal{L}(P)$  である。つまり、 $\mathcal{L}(P)$  は  $\pi$ -システムである。 //

◦ Hopf の拡張定理.

こちらは長くなるので証明はしない.

スタートポイントを付述入る.

Def (有限加法族)

$\mathcal{A}$  が有限加法族  $\Leftrightarrow$

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) \phi, \Omega \in \mathcal{A} \\ (2) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \\ (3) A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{m=1}^n A_m \in \mathcal{A} \end{array} \right.$$
- $\phi$  有限和を  $\bigcup$  //

Def (集合半環) (半環は  $\Omega \in S$  を要請しない)

$S$  が集合半環  $\Leftrightarrow$

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) \phi, \Omega \in S \\ (2) S \text{ は } \pi\text{-システム } (A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S) \\ (3) A \in S \text{ から, } A^c \text{ は有限個の互いに} \\ \text{排反な集合 } B_1, \dots, B_n \in S \text{ に分割できる:} \\ A^c = \bigcup_{i=1}^n B_i \text{ (} B_i \in S, B_i \cap B_j = \phi \text{ (} i \neq j \text{))} \end{array} \right.$$
- $\bigcup$  //

例  $\Omega = \mathbb{R}$ .

$S = \{(a, b] \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$  は集合半環.

Lem.

集合半環  $S$  を含む最小の有限加法族は、 $S$  の互いに排反な元達の有限和の族として表せる.

$$\mathcal{A}(S) = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid I: \text{有限}, B_i \in S, B_i \cap B_j = \phi \text{ (} i \neq j, i, j \in I \text{)} \right\}$$

$\uparrow$   $S$  を含む最小の有限加法族 //

Thm.

代教

$S$ :  $\Omega$  上の集合半環

$P: S \rightarrow [0,1]$ :  $S$  上の  $\sigma$ -加法的集合関数  $\Sigma$  以下をみたす:

$$\left[ \begin{array}{l} P(\Omega) = 1, A_n \in S \text{ かつ } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S \text{ の互いに排反なる } \\ P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array} \right]$$

すると  $P$  の  $\sigma(S)$  への拡張  $P'$  が一意に存在し.

$$P' \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

(  $A_i \in S, I$ : 有限,  $(A_i)_{i \in I}$  は互いに排反 )

$\Sigma$  と一致する.  $P'$  は  $\sigma(S)$  上の  $\sigma$ -加法的な確率測度となる.

Thm (Hoff の拡張定理)

- (1)  $0 \leq P(A) \leq 1$  ( $\forall A \in \mathcal{A}$ ),  $P(\Omega) = 1$
- (2)  $P(A) = 1 - P(A^c)$ , (3)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  (互いに排反)

有限加法族  $\mathcal{A}$  上の  $\sigma$ -加法的確率測度に対し.  $\mathcal{A} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$  なら

$\sigma(\mathcal{A})$  への拡張が一意に存在する.

$$P \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

上の2つのThmを合わせると. 次の定理を得る.

Thm

代教

集合半環  $S$  上の  $\sigma$ -加法的な集合関数  $P: S \rightarrow [0,1]$   $\Sigma$ :  $P(\Omega) = 1$  をみたすもの.  $\sigma(S)$  上に一意に拡張できる.

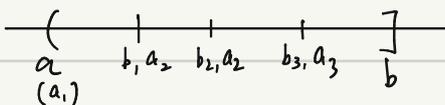
$\rightarrow$  正しい場合は. この段  $P$  が  $\Sigma$  に対して Jordan 測度

例として  $(0,1]$  区間上のルビーク測度は  $S = \{(a,b] \mid 0 \leq a < b \leq 1\}$  上で

$\sigma$ -加法的に存在することを示せる.  $\rightarrow$  例.  $\mu((a,b]) = b-a$  とおくと.

$$(a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \quad (\text{互に disjoint}) \text{ に対して}$$

$$\mu((a,b]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i])$$



$$\rightarrow \text{例. } b-a = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$$

が示せる. したがって.  $((0,1], \mathcal{B}((0,1]))$  上の確率測度  $\mu'$   $\Sigma$ :

$$\mu'((0,1]) = 1, \mu'((a,b]) = \mu((a,b]) = b-a$$

であるものが. 唯一存在することを従う. ( $\because \sigma(S) = \mathcal{B}((0,1])$ )