

確率数理要論10

- マルコフチェーンの続き.

Thm (Doobの不等式)

$(X_n)_{n=0}^{\infty}$: 非負値の常マルコフチェーン

$$\Rightarrow P\left(\max_{0 \leq i \leq n} X_i \geq a\right) \leq \frac{E[X_n]}{a} \quad (\forall a > 0)$$

* 4.7.2.2の不等式の拡張

* 非負性を外したら.

$$P\left(\max_{0 \leq i \leq n} X_i \geq a\right) \leq \frac{E[X_n \mathbb{1}_{\{\max_{0 \leq i \leq n} X_i \geq a\}}]}{a} \quad (\forall a > 0)$$

(Proof)
$$\tau = \begin{cases} \min\{0 \leq i \leq n \mid X_i \geq a\} & \text{if } 0 \leq \exists i \leq n, X_i \geq a \\ n & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると, $\tau \leq n$ まで停止時刻.

任意抽出定理より

$$E[X_n] \geq E[X_\tau] \geq E[X_\tau \mathbb{1}_{\{X_\tau \geq a\}}] \geq E[a \mathbb{1}_{\{X_\tau \geq a\}}] = a P(X_\tau \geq a)$$

\uparrow
 $\because X_\tau$ の非負性

$$X_\tau \geq a \iff \max_{0 \leq i \leq n} X_i \geq a \quad \text{より O.K.}$$

Lem $(X_n)_{n=0}^{\infty}$: マルコフチェーン, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 凸関数, $\varphi(X_n) \in L^1$

$\Rightarrow (\varphi(X_n))_{n=0}^{\infty}$ は常マルコフチェーン

(Proof) Jensenの不等式より

$$E[\varphi(X_n) \mid \mathcal{F}_m] \geq \varphi(E[X_n \mid \mathcal{F}_m]) = \varphi(X_m) \quad (\text{a.s.})$$

Cor $(X_n)_{n=0}^{\infty}$: マルコフチェーン, $a > 0$, $p \geq 1$, $X_n \in L^p$

$$\Rightarrow P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \geq a\right) = P\left(\max_{1 \leq i \leq n} |X_i|^p \geq a^p\right) \leq \frac{E[|X_n|^p]}{a^p}$$

(Proof) $\varphi(x) = |x|^p$ は凸

Thm (Doobの分解)

$(X_n)_n$: 常2L427-ル, 可積分 ($X_n \in L^1, \mathcal{F}_n$)
 に対し, 以下をみたす $(A_n)_n$ が (a.s.) 唯一存在する:

- (1) $A_0 = 0$
- (2) A_n は \mathcal{F}_{n-1} -可測 ← 可予測と言う (predictable)
- (3) $(X_n - A_n)_n$ は 常2L427-ル
- (4) $A_{n-1} \leq A_n$ (a.s.) (\mathcal{F}_n) //

つまり, 常2L427-ルは以下のよりに分解できる:

$$\begin{array}{ccccc} X_n & = & A_n & + & Z_n \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{常2} & & \mathcal{F}_{n-1}\text{-可測} & & \text{常2L427-ル} \\ & & \text{右義単調増大} & & \end{array}$$

(Proof)

[存在] まず, $A_0 = 0$ と (2).

$$A_n = A_{n-1} + E[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}]$$

とある。 $(X_n)_n$ は常2L427-ルなので, 二項は (1) ~ (4) の条件をみたす。

[一意性]

$(B_n)_n \in$ (1) ~ (4) の条件を満たすものと.

$$\Delta_n = B_n - A_n \text{ とある.}$$

(1) より, $\Delta_0 = 0$ である.

また, $\Delta_n = B_n - A_n = (B_n - X_n) - (A_n - X_n)$ より Δ_n も常2L427-ル.

よって, Δ_n は \mathcal{F}_{n-1} -可測である

$$\text{よって, } \Delta_n = \underset{\mathcal{F}_{n-1}\text{-可測性}}{E[\Delta_n | \mathcal{F}_{n-1}]} = \underset{\text{常2L427-ル性}}{\Delta_{n-1}} \text{ である.}$$

$\Delta_0 = 0$ であることより, $\Delta_n = 0$ (a.s.) (\mathcal{F}_n) である. //

ζ : 停止時刻

$$\mathcal{F}_\zeta := \{ A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\zeta = n\} \in \mathcal{F}_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z}^+) \}$$

とある.

今, $(X_n)_n$ が \mathcal{F}_n -適合のとき, $X_\zeta(\omega) := X_{\zeta(\omega)}(\omega)$ は \mathcal{F}_ζ -可測である.

$$\begin{aligned} X_\zeta^{-1}(B) &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \{\zeta = n\} \cap \underbrace{X_n^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}_n} \Rightarrow \{\zeta = n\} \cap X_\zeta^{-1}(B) \\ &= \underbrace{\{\zeta = n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{X_n^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}_n} \\ &(\because \zeta \text{ は停止時刻}) \end{aligned}$$

Thm (Hunt の定理)

$(X_n)_n$: 常マルコフ過程

τ, τ' : 有界な停止時刻で $\tau \leq \tau'$ ($\forall \omega$) とある.

このとき,

$$X_\tau \leq E[X_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] \quad (\text{a.s.})$$

である.

(ただし右辺は停止時刻に対して成り立つ)

(Proof)

Doob の分解より, $X_n = A_n + Z_n$ と分解できる.

$\tau \leq \tau'$ より $A_\tau \leq A_{\tau'}$ である. A_τ は \mathcal{F}_τ -可測なものである (上の2点参照)

$$E[X_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] \geq E[Z_{\tau'} + A_\tau \mid \mathcal{F}_\tau] \quad (\because A_\tau \leq A_{\tau'})$$

$$= E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] + A_\tau \quad (\because \mathcal{F}_\tau\text{-可測性})$$

よって, $E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] = Z_\tau$ を常マルコフ過程 $(Z_n)_n$ に対して示せば良い.

τ, τ' は有界なので, $\exists N$ で $\tau, \tau' \leq N$ (a.s.) である.

このとき, $\forall E \in \mathcal{F}_\tau$ に対して,

$$E[Z_N \mathbb{1}_E] = \sum_{n=0}^N E[Z_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mathbb{1}_E] \quad (\because \tau \leq N)$$

$$= \sum_{n=0}^N E[E[Z_N \mid \mathcal{F}_n] \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mathbb{1}_E] \quad (\because E \in \mathcal{F}_\tau)$$

$$= \sum_{n=0}^N E[Z_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mathbb{1}_E]$$

$$= E[Z_\tau \mathbb{1}_E]$$

← ↑ $\tau \rightarrow \tau'$ 同様

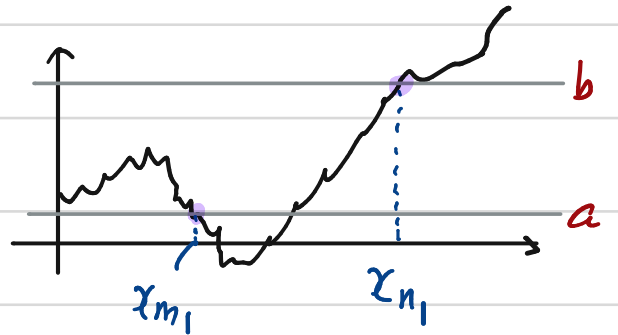
同様に, $E \in \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau'}$ より, $E[Z_N \mathbb{1}_E] = E[Z_{\tau'} \mathbb{1}_E]$

となるので, 条件付き期待値の一貫性より, $E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] = Z_\tau$ (a.s.)

($E[Z_{\tau'} \mathbb{1}_E] = E[E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] \mathbb{1}_E]$ ($\forall E \in \mathcal{F}_\tau$) を満たす \mathcal{F}_τ -可測な r.v. $X = E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau]$)

- 2次元マルコフ収束定理

$(X_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$: 数列
 $-\infty < a < b < \infty$
 に対すし.



- $(X_n)_n$ が $[a, b]$ を N 回以上横断 (upcross) する.
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} 0 \leq m_1 < n_1 < \dots < m_N < n_N$ が存在し
 $X_{m_i} \leq a$ かつ $X_{n_i} \geq b$ ($1 \leq i \leq N$).
- N 回以上横断し、 $N+1$ 回以上横断しないとき、「 N 回横断する」と言う

Lem

$\liminf_n X_n < \limsup_n X_n \iff \exists a < b$ な有理数で、
 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対すし、
 $(X_n)_n$ が $[a, b]$ を N 回以上横断する。
 ↓
 2回無限回横断する //

(証明は容易なので省略) ← 参考せよ。

Thm (Doobの2次元マルコフ収束定理)

$(X_n)_n$: 劣2次元マルコフ, 可積分

$U_{[a,b]}(\omega) = U(\omega)$: $(X_n(\omega))_n$ が区間 $[a, b]$ を横断する回数

$$\Rightarrow E[U] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{E[(X_n - a)_+]}{b - a} \quad \leftarrow (x-a)_+ = \max\{x-a, 0\}$$

である。特に、

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E[(X_n)_+] < \infty$$

なら、 $\exists X \in L^1$ であり、

$$X_n \rightarrow X \quad (\text{a.s.})$$

※ $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[(X_n)_+] < \infty$ (これは $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ が成り立つとは成り立たない) である劣2次元マルコフは必ず振動せず収束する。 //

(Proof)

$Y_n = \frac{(X_n - a)_+}{b - a}$ とする. Jensen の不等式より $Y_n \in$ 可積分な有界な変数.

$N \in \mathbb{N}$ を任意に固定する.

$\tau'_0 = 0$ とし, $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\tau_k = \inf \{ n \geq \tau'_{k-1} \mid X_n \leq a \} \wedge N$$

$$\tau'_k = \inf \{ n \geq \tau_k \mid X_n \geq b \} \wedge N$$

とする. τ_k, τ'_k を停止時刻とあることは確かである. τ_k は有界である.

$U^{(N)}(\omega)$ を $(X_{n \wedge N}(\omega))_n$ が $[a, b]$ を横断する回数とする.

$$\begin{aligned}
U^{(N)} &\leq \sum_{k=1}^N (Y_{\tau'_k} - Y_{\tau_k}) = Y_N - Y_0 \\
&\quad - \sum_{k=1}^N (Y_{\tau_k} - Y_{\tau'_{k-1}}) \\
&\leq Y_N - \sum_{k=1}^N (Y_{\tau_k} - Y_{\tau'_{k-1}})
\end{aligned}$$

← $\tau_N = N$ (時刻 N まで N 回以上横断する)

ここで, $\tau_k \geq \tau'_{k-1}$ より, Hunt の定理より, $E[Y_{\tau_k} - Y_{\tau'_{k-1}}] \geq 0$ (τ_k) である.
よって,

$$E[U^{(N)}] \leq E[Y_N]$$

↑ 非自明な有界性とその有界性が知られた.

あとは $N \rightarrow \infty$ とするとして単調収束定理から最初の不等式を得る.

(第2の主張)

$$E[|X_n|] = 2 E[X_n^+] - E[X_n] \leq 2 E[X_n^+] - E[X_0] \quad (*)$$

より, $\sup_n E[X_n^+] < \infty$ の仮定から $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ である.

このことから, $Y_n = \frac{(X_n - a)_+}{b - a}$ に対して, $\sup_n E[Y_n] < \infty$ である.

これは,

$$E[U] < \infty$$

であり, 特によく $U[a, b] < \infty$ (a.s.). a, b の取り方は任意なので,

$$\exists \Lambda \in \mathcal{F} \text{ s.t. } P(\Lambda) = 1 \quad (*)$$

$$U[a, b](\omega) < \infty \quad (\forall a < b \in \mathbb{Q}, \forall \omega \in \Lambda)$$

とできる.

↑ 可算無限個

このことより、 $\forall \omega \in \Omega$ に対し $\liminf X_n(\omega) = \limsup X_n(\omega)$ である。
 (先のlem)
 つまり、 $\exists X(\omega) \in [-\infty, \infty]$ である。

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

である。

再び $X \in \mathcal{L}^1$ である。Fatouの定理

$$\begin{aligned} E[|X|] &= E[\liminf |X_n|] \leq \liminf E[|X_n|] \\ &\leq \liminf (2E[X_n^+] - E[X_0]) \\ &< \infty \end{aligned}$$

を得る。よって $X \in \mathcal{L}^1$ である。 //

Cor

$(X_n)_n$: マルコフ過程。

$\exists X \in \mathcal{L}^1$ として $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ となる。

$\Leftrightarrow (X_n)_n$ が一様可積分 (つまり $\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq M\}}] = 0$) //

(Proof) (\Rightarrow) は省略

(\Leftarrow) 一様可積分性より、Doobのマルコフ過程収束定理より、

$\exists X \in \mathcal{L}^1$ として $X_n \rightarrow X$ (a.s.) である。

一様可積分性より $(X_n)_n$ が $X_n \rightarrow X$ (a.s.) を満たすとき、

$X_n \xrightarrow{L^1} X$ である。

今、

$$- X_m = E[X_n | \mathcal{F}_m] \quad (\forall n \geq m)$$

$$- |E[X_n | \mathcal{F}_m] - E[X | \mathcal{F}_m]| \leq E[|X_n - X| | \mathcal{F}_m] \rightarrow 0 \quad (\text{in } L^1)$$

よって、

$$X_m = E[X_n | \mathcal{F}_m] \xrightarrow{L^1} E[X | \mathcal{F}_m]$$

である。よって、

$$X_m = E[X | \mathcal{F}_m] \quad (\text{a.s.}) //$$

$$(E[|X_m - E[X | \mathcal{F}_m]|] = 0 \Rightarrow X_m = E[X | \mathcal{F}_m] \text{ (a.s.)})$$

* 証明より、Corの条件の充て2: $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ かつ $X_n \xrightarrow{L^1} X$ である。

逆に $X_n \xrightarrow{L^1} X \Rightarrow (X_n)_n$ は一様可積分かつ $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ を証明できる。

(12/23 復習)

上の系と註をまとめると、以下を得る。

Cor

$(X_n)_n$ を martingale とする。

このとき 以下は同値

(1) $(X_n)_n$ は L^1 内の収束列. つまり $\exists X \in L^1$ 2. $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

(2) $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ かつ

$\exists X \in L^1$ 2. $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ (martingale 収束定理より) かつ

$$X_n = E[X | \mathcal{F}_n].$$

(3) $\exists X \in L^1$ 2. $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$. ← この性質を martingale かつ閉

2. あると言う

(closed)

(4) $(X_n)_n$ は 一様可積分

可閉, closable
と言う.

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$, $\sup_n E[|X_n|] < \infty$, $X \in L^1$ 2. ある 2. 2

$X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ 2. 保証する.

$(X_n)_n$ の 一様可積分性 2. 保証する $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ 2. 保証する.

(逆に $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ 2. 保証する)

各 n に対し $(\mathcal{F}_{m,n})_{m=0}^n$ を filtration とす.

各 $1 \leq m \leq n$ に対し $X_{m,n} \in L^1$ が $\mathcal{F}_{m,n}$ -可測) かつ

$$E[X_{m,n} | \mathcal{F}_{m-1,n}] = 0 \text{ みたすとき,}$$

$(X_{m,n})_{m,n}$ を 2次元マールティンゲール差数列 (martingale difference array) とす.

この時、 $(\sum_{l=0}^m X_{l,n})_{m=0}^n$ は $(\mathcal{F}_{m,n})_{m=0}^n$ -2次元マールティンゲールとなる.

Thm (2次元マールティンゲール中心極限定理)

$(X_{m,n})$: 2次元マールティンゲール差数列

以下を仮定する:

$$(i) \sum_{m=1}^n E[X_{m,n}^2 | \mathcal{F}_{m-1,n}] \xrightarrow{P} 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0, \sum_{m=1}^n E[X_{m,n}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{m,n}| \geq \varepsilon\}} | \mathcal{F}_{m-1,n}] \xrightarrow{P} 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

← Lindberg の条件

この時、

$$\sum_{m=1}^n X_{m,n} \xrightarrow{D} N(0,1) \quad (n \rightarrow \infty) \quad //$$

(証明は. Hall and Hyde (1980), "Martingale Limit Theory and Its Application" Cor. 3.1 とその後の Remark)

これは i.i.d. の CLT を特別な例として含む.

$(X_i)_{i=1}^{\infty}$ が i.i.d. r.v.s として $E[X_i] = 0, \text{Var}[X_i] = \sigma^2$ のとき、

$$X_{m,n} = \frac{X_m}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \mathcal{F}_{m,n} = \sigma(X_1, \dots, X_m)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{これは} & \left\{ \begin{aligned} - E[X_{m,n} | \mathcal{F}_{m-1,n}] &= 0 \\ - \sum_{m=1}^n E[X_{m,n}^2 | \mathcal{F}_{m-1,n}] &= n E\left[\frac{1}{n\sigma^2} X_1^2\right] = 1 \\ - \sum_{m=1}^n E[X_{m,n}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{m,n}| \geq \varepsilon\}} | \mathcal{F}_{m-1,n}] &= n \cdot E\left[\frac{1}{n\sigma^2} X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| \geq \sqrt{n}\sigma\varepsilon\}}\right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} E[X_1^2 \mathbb{1}_{\{|X_1| \geq \sqrt{n}\sigma\varepsilon\}}] \rightarrow 0 \quad (\text{優収束定理}) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

∴ CLT が成立す.

連続時間マルコフチェーン

$(X_n)_{n=0}^{\infty}$ の代わりに $(X_t)_{t \geq 0}$ に対して同様にマルコフチェーンの定義を定める: $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ (a.s.) ($\forall t > s$).

同様に ρ を, 優 ρ を定義する.

右連続な ρ を持つ ρ -マルコフチェーンに対しては (任意抽出定理, Doob の不等式, マルコフチェーン収束定理が成り立つ).

Thm

Brown 運動 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ は $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s | s \in [0, t]\})$ に対してマルコフチェーン //

(Proof)

$B_t \sim N(0, t)$ かつ $B_t \in L^1$ である. B_t は \mathcal{F}_t -可測である.

$t > s$ に対して

$$E[B_t | \mathcal{F}_s] = E[B_s + \underbrace{B_t - B_s}_{\substack{\text{ } \\ \rightarrow \mathcal{F}_s \text{ と独立}}} | \mathcal{F}_s]$$

$$= B_s + E[B_t - B_s] = B_s //$$

Thm

$f \in \mathcal{L}^2([0, T])$ に対し $X_t = \int_0^t f_s dB_s$ とおくと、
 $(X_t)_{t \in [0, T]}$ は $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ に関してマルティンゲール。 //

(Proof)

$X_t \in L^2$ かつ X_t は \mathcal{F}_t -可測 かつ

$E[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] = 0$ を示せば良い。

近似する単過程の確率積分を $X_t^{(n)}, X_s^{(n)}$ と書けば

$\forall A \in \mathcal{F}_s$ に対し、

$E[X_t - X_s, A] \leftarrow E[(X_t - X_s) \mathbb{1}_A]$ の値

$$= \underbrace{E[X_t - X_t^{(n)}, A]}_{\downarrow 0} + \underbrace{E[X_s^{(n)} - X_s, A]}_{\downarrow 0} + \underbrace{E[X_t^{(n)} - X_s^{(n)}, A]}_{\parallel 0}$$

$\longrightarrow 0$

(\because Brown 運動の
マルティンゲール性)

* 逆に $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ に関するマルティンゲールが $X_t \in L^2$ を満たすなら、

$\exists f \in \mathcal{L}^2([0, T])$ s.t.

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s dB_s \quad (t \in [0, T]).$$

(マルティンゲール表現定理)