確率数理要論11

マルチンゲールの続き.

確率積分 $\int f_t dB_t$ は連続なセミマルチンゲール等を用いた確率積分まで拡張できる.

(参考) X: 連続セミマルチンゲール

$\iff$ $X = X_0 + M + A$

- X_0: $\mathcal{F}_0$-可測
- M: 連続な局所二乗可積分マルチンゲールで $M_0 = 0$
  - パスが連続
  - $\exists \tau_1 < \tau_2 < \cdots \to \infty$ (停止時刻の列)
    $M^{\tau_j} = (M_{t \wedge \tau_j})_t$ が二乗可積分マルチンゲール
    つまり $\sup_{t \geq 0} E[(M_t^{\tau_j})^2] < \infty$
- A: 連続な有界変動過程 ($A_0 = 0$, $\mathcal{F}_t$-適合, $t \mapsto A_t(\omega)$ が有界変動 on each $[0,T]$ ($T > 0$))

$$\int f_t dX_t = \sum_{j=0}^{J} u_j (X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \quad \text{for} \quad f_t = \sum_{j=0}^{J} u_j \mathbb{I}[t_j, t_{j+1})(t):$$

単過程

ここではマルチンゲールによる確率積分について軽く説明する.

$(M_t)_{a \leq t \leq b}$: 二乗可積分マルチンゲール

$\hookrightarrow \sup_{a \leq t \leq b} E[M_t^2] < \infty$

かつ

$t \mapsto M_t(\omega)$ は càdlàg (右連続かつ左極限が存在).

とする.

↳ 次ページ

Jensenの不等式より $(M_t^2)_t$ は劣マルチンゲールとなる.
すると, 連続時間版のDoobの分解より,
ある 可予測、右連続な 増加過程 $(A_t)_t$ が存在して,

↳ $(s,t] \times A \ (A \in \mathcal{F}_s)$,
$\{s\} \times B \ (B \in \mathcal{F}_s)$,
で生成される $[a,b] \times \Omega$ 上の最小の σ-加法族 $\mathcal{P}$ に対して
$(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ が可測になる確率過程

↳ $\mathcal{F}_t$-適合, $A_0=0$, $t \mapsto A_t(\omega)$ が非減少

$M_t^2 - A_t$ がマルチンゲールとなる.
この A_t を $\langle M \rangle_t$ と書く. (compensator, 補償子と言う)

例: • $M_t = B_t$ (ブラウン運動)
$\Longrightarrow \langle M \rangle_t = t$
実際

$$E[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 - t \mid \mathcal{F}_s]$$
$$= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$$

• $M_t = N_t - \lambda t$ ただし, N_t は強度 λ の定常ポアソン過程
$\Longrightarrow \langle M \rangle_t = \lambda t$

Def
$\mathcal{L}^2([a,b], M)$ を 全ての可予測かつ $E\left[\int_a^b |f_t|^2 d\langle M \rangle_t\right] < \infty$
をみたす確率過程の集合とする.

Rieman-Stielties積分:
$\sum_{k=1}^{n} f_{t_k}^2 (\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}})$
の極限. ただし $(t_k)_{k=0}^{n}$ は
$[a,b]$ の n 等分割点)

$(f_t)_t \in \mathcal{L}^2([a,b], M)$ を,
単過程とする:

$$f_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} e_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(\omega).$$

このとき, その M による確率積分を

$$\int f_t \, dM_t := \sum_{i=1}^{n} e_i(\omega) (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$$

と定める.

Thm (等長性)

上記の$(f_t)_t$に対して、

$$E\left[\left(\int_a^b f_t\,dM_t\right)^2\right] = E\left[\int_a^b f_t^2\,d\langle M\rangle_t\right]$$

//

※ $M_t = B_t$ のとき $\langle M\rangle_t = t$ であったことを思い出すし、
これは以前に紹介した伊藤の等長性の一般化になっていることがわかる。

このことから一般の $f \in \mathcal{L}^2([a,b], M)$ に対しては単過程の列 $f^{(n)} \in \mathcal{L}^2([a,b], M)$ であって

$$E\left[\int_a^b (f_t - f_t^{(n)})^2\,d\langle M\rangle_t\right] \longrightarrow 0$$

をみたすものを取って来て、

$$\int_a^b f_t\,dM_t := \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_t^{(n)}\,dM_t$$

と定義する。

この後で述べる伊藤の公式も $\langle M\rangle_t$ を用いてマルチンゲールまで拡張することができる。

伊藤の公式と確率微分方程式

$(B_t)_{t\geq 0}$: Brown 運動
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$: filtration　　　$\left(B_t \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{-適合かつ. } B_s - B_t \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ と独立}\right)$ $(s\geq t)$

Def (伊藤過程, Itô process)

$(v_t)_t \in \mathcal{L}^2([0,T])$
$(u_t)_t$: $(\mathcal{F}_t)$-適合で $\int_0^T |u_t|dt < \infty$ (a.s.)　$\left(u_t \in \mathcal{L}([0,T]) \text{ と書く}\right)$

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s \quad (t\in[0,T])$$

と書ける時、$(X_t)_{t\in[0,T]}$ を伊藤過程と言う.

形式的に

$$dX_t = u_t dt + v_s dB_s$$

と書く.

$\mathcal{F}_t$-適合な $(f_t)_t$ に対し.

$$\int_0^t f_s dX_s := \int_0^t f_s u_s ds + \int_0^t f_s v_s dB_s$$

とする. これも、

$$f_t dX_t = f_t u_t dt + f_t v_t dB_t$$

と書く.　(先のセミマルチンゲールによる積分と整合性のある定義になっている)

Thm (伊藤の公式, Itô's formula)

$(X_t)_{t\in[0,T]}$: 伊藤過程

$\varphi(t,x) \in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R})$ (つまり $\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ が存在して連続)

$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,X_t)v_t\right)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{L}^2([0,T])$

$$\Longrightarrow \varphi(T,X_T) = \varphi(0,X_0) + \int_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,X_t)dt + \int_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,X_t)\,u_t\,dt + \int_0^T \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,X_t)\,v_t\,dB_t + \underline{\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,X_t)\,v_t^2\,dt}$$

//

$Y_t = \varphi(t,X_t)$ とすると,

$$dY_t = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,X_t) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,X_t)v_t^2\,dt}}$$

と書ける.

この項がなければ合成関数の微分の形.

直観:

dY_t が $Y_{t+\varepsilon} - Y_t$ なる微小変化を表していると考えると,

テイラー展開より

$$dY_t = \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,X_t)dt^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}(t,X_t)\,dt\,dX_t\right)$$

$$+\ (\text{higher order})$$

となる.

問題は2次の項で, ここに $dX_t = u_t dt + v_t dB_t$ を代入すると

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(u_t^2dt^2 + 2u_tv_t\,dt\,dB_t + v_t^2(dB_t)^2\right) + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\left(u_t dt^2 + v_t\,dB_t\,dt\right)\right]$$

となる.

ここで、以下のルールをあてはめる：

$$\begin{cases} dt^2 = 0 \\ dt\,dB_t = 0 \\ dB_t^2 = dt \end{cases} \qquad \text{(伊藤の公式)}$$

すると、

$$(dX_t)^2 = v_t^2\,dt$$

となるので、

$$dY_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}v_t^2\,dt$$

を得る。

($dB_t^2 = dt$ は $E[(B_{t+\varepsilon} - B_t)^2] = \varepsilon$ であることから $dB_t^2 = dt$ とみなせる。)

(略証)

φ が連続2回微分可能かつ導関数が有界であるとする。

また、$v_s(\omega)$ を (s,ω) によらず一定であるとする。

$0 = t_0 < t_1 < \cdots \leq t_n = t$ を等分割 ($t_i = \frac{t}{n}i$) とする。

$$\varphi(t, X_t) - \varphi(0, X_0) = \sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(t_i, X_{t_i}) - \varphi(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})\right]$$

である。テイラー展開より、

$$\begin{aligned}
&\varphi(t_i, X_{t_i}) - \varphi(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \\
&= \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})}_{①} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})}_{②} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(\tau_i, \xi_i)(t_i - t_{i-1})^2}_{③} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\tau_i, \xi_i)(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2}_{④} \\
&\quad + \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial x}(\tau_i, \xi_i)(t_i - t_{i-1})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})}_{⑤}
\end{aligned}$$

(ただし、τ_i, ξ_i は $[t_i, t_{i-1}]$ および $[X_{t_i}, X_{t_{i-1}}]$ の中点)

①：$(X_t)_t$ は $\overset{\text{(a.s.で)}}{\text{連続}}$ かつ $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ は有界連続なので

$$\sum_{i=1}^{n} ① \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, X_s)\,ds \qquad \text{(a.s.)}.$$

②: $X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} u_s\,ds}_{\Delta U_i} + \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} v_s\,dB_s}_{\Delta V_i}$ であることを思い出すと、

$$\sum_{i=1}^{n} ② = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})$$

であるが、 $u_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \longrightarrow u_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s)$ $(\forall s)$ かつ (∵ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ は有界, $v_s \in \mathcal{L}^2$)

$$\sum_{i=1}^{n} v_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(s) \longrightarrow v_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) \quad (\text{in } \mathcal{L}^2([0,t]))$$

なので、

L^1　有界 ⇒ 優収束　∵ 伊藤の等長性

$$\sum_{i=1}^{n} ② \longrightarrow \int_0^t u_s \frac{\partial}{\partial x}\varphi(s, X_s)\,ds + \int_0^t v_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s)\,dB_s$$
$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\varphi(s, X_s)\,dX_s$$

③: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$ は有界なので、 $\sum_{i=1}^{n} ③ \leq \underbrace{\max_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi(s, X_s) \right|}_{\text{有界}} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(t_i - t_{i-1})^2}_{O(\frac{1}{n^2})} \longrightarrow 0$

つまり $(dt)^2 = 0$

⑤:

$(X_t)_t$ は a.s. で連続なので、 $\max_{1 \leq i \leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \longrightarrow 0$ (a.s.)

さらに、 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ は有界なので、

$$\sum_{i=1}^{n} ⑤ \leq \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\max_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(s, X_s) \right|}_{< \infty} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|}_{t} \longrightarrow 0 \quad (\text{a.s.})$$

④: $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = (\Delta U_i)^2 + (\Delta V_i)^2 + 2\Delta U_i \Delta V_i$ であるが、

$(\Delta U_i)^2$, $\Delta U_i \Delta V_i$ の項は上と同様にして、 $\sum_{i=1}^{n}(\cdots) \longrightarrow 0$ (a.s.) が言える。

$(\Delta V_i)^2$ の項は

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\tau_i, \xi_i)}_{\approx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})} \underbrace{\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} v_s\,dB_s\right)^2}_{v_{t_{i-1}}^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2} \quad (∵ \text{伊藤積分}, v_s \text{ は定数})$$

であり、

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})\, v_{t_{i-1}}^2 \left[(\underbrace{B_{t_i}-B_{t_{i-1}}}_{N(0,\frac{t}{n})})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right] \longrightarrow 0 \quad (2次平均収束)$$

大数の法則

かつ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})\, v_{t_{i-1}}^2 (t_i - t_{i-1}) \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(s, X_s)\, v_s^2\, ds \quad (a.s.)$$

(∵ Rieman積分の定義)

よって示された。

//

Ex.

$$dX_t = B_t\, dB_t \qquad (v_t = B_t,\ u_t = 0 \text{ とする})$$

$\varphi(t,x) = x^2$ として. 伊藤の公式を当てはめる.

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ より.

$$\begin{aligned} d(B_t^2) &= 2B_t\, dB_t + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (dB_t)^2 \\ &= 2B_t\, dB_t + dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_t^2 = \underbrace{B_0}_{0} + 2\underbrace{\int_0^t B_s\, dB_s}_{X_t} + \underbrace{\int_0^t 1\, ds}_{t}$$

$$\Rightarrow X_t = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \qquad (前回の例)$$

Ex. (Black-Scholesモデル)

$$Y_t = c\exp(\mu t + \sigma B_t)$$

$$X_t = \mu t + \sigma B_t$$

$\varphi(t,x) = ce^x$ とすると. $Y_t = \varphi(t, X_t)$.

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = ce^x$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ より、伊藤の公式より

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \int_0^t Y_s\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t Y_s\, \overbrace{\sigma^2 dt}^{(dX_t)^2} \\ &= c + \int_0^t \mu Y_s\, ds + \int_0^t \sigma Y_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 Y_s\, ds \end{aligned}$$

$Y_s > 0$ かつ. $\int_0^t \sigma Y_s\, dB_s$ はマルチンゲールなので.

$$Y_t \text{ がマルチンゲール} \iff \mu + \frac{\sigma^2}{2} = 0$$

※株価をマルチンゲールとみなすと. 色々な解析が可能になる.

- 多次元の場合

Thm (多次元版伊藤の公式)

$\begin{pmatrix} B_t^{(1)} \\ \vdots \\ B_t^{(m)} \end{pmatrix}$ 独立なBM

$B_t = ((B_t^{(j)})_{t \geq 0})_{j=1}^m$: m次元 Brown 運動

$(u_t^{(i)})_t \in \mathcal{L}([0,T])$, $(v_t^{(i,j)})_t \in \mathcal{L}^2([0,T])$ $(^\forall i,j \in [m])$

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t$$

$$\left(dX_t^{(i)} = u_t^{(i)} dt + \sum_{j=1}^m v_t^{(i,j)} dB_t^{(j)} \text{ の意味} \right)$$

と書ける時、$X_t = (X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(d)})^T$ をd次元伊藤過程と呼ぶ.

$\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_t) v_t^{(i,j)} \right)_t \in \mathcal{L}^2([0,T])$ $(^\forall i,j)$,

$Y_t = \varphi(X_t)$ のとき,

$\Longrightarrow$

$$dY_t = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_t) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) \Big(\overbrace{\sum_{k=1}^m v_t^{(i,k)} v_t^{(j,k)}}^{\text{共通}} \Big) dt$$

Ex.

X_t, Y_t : 伊藤過程 $(dX_t = a_t dt + \sigma_t^{(1)} dB_t,\ dY_t = C_t dt + \sigma_t^{(2)} dB_t)$

$$\Longrightarrow d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2}(dX_t dY_t + dY_t dX_t)$$
$$= X_t dY_t + Y_t dX_t + \underline{\underline{\sigma_t^{(1)} \sigma_t^{(2)} dt}}$$

よって.

$$\int X_t dY_t = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int Y_t dX_t - \int \sigma_t^{(1)} \sigma_t^{(2)} dt$$

(部分積分の公式)

確率微分方程式

b_t, σ_t : 可測関数 s.t. $b_t(X_t)\in \mathcal{L}([0,T])$, $\sigma_t(X_t)\in \mathcal{L}^2([0,T])$

$$dX_t = \underbrace{b_t(X_t)\,dt}_{\text{ドリフト係数}} + \underbrace{\sigma_t(X_t)\,dB_t}_{\text{拡散係数}}$$

: 確率微分方程式 (Stochastic differential equation; SDE)

をみたす $(X_t)_t$ を求める問題を考える。

☆ X_t の振るまいは自身のこれまでの振るまいで決定される。

SDEは右辺第2項がなければ通常の(一階線形)微分方程式になる。

Def

$(X_t)_t$ が SDEをみたす時、(強)解 (strong solution) という。
この時、拡散過程 (diffusion process) とも呼ばれる。

Ex. (Ornstein-Uhlenbeck process)

$\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ に対して、

SDE: $dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma\,dB_t$

の解を Ornstein-Uhlenbeck 過程と言う。(OU-過程)

$e^{-\mu t}X_t$ に伊藤の公式を使う ($\varphi(t,x)=e^{-\mu t}x$) と、

$$d(e^{-\mu t}X_t) = -\mu e^{-\mu t}X_t\,dt + e^{-\mu t}\,dX_t$$

$$= \cancel{-\mu e^{-\mu t}X_t\,dt} + e^{-\mu t}(\cancel{\mu X_t\,dt} + \sigma B_t)$$

$$= \sigma e^{-\mu t} B_t$$

よって、

$$e^{-\mu t}X_t = X_0 + \int_0^t \sigma e^{-\mu s}\,dB_s$$

$$\Longrightarrow X_t = e^{\mu t}X_0 + \int_0^t \sigma e^{\mu(t-s)}\,dB_s$$

$\mu<0$ のとき、原点に戻る力が働いている。

Ex.

Black-Scholesモデルは

SDE: $dX_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) X_t dt + \sigma X_t dB_t$

の解になっている。

幾何Brown運動とも呼ばれる。

Thm

ある $c>0$ があって、$\forall t \in [0,T]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$|b_t(x) - b_t(y)| \leqq c|x-y|$, $|\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \leqq c|x-y|$ --- (1)

$|b_t(x)| \leqq c(1+|x|)$, $|\sigma_t(x)| \leqq c(1+|x|)$ --- (2)

をみたすとき、SDEは一意的な解を持つ。

（一意の意味は、2つの解 X_t, Y_t に対し、
$P(X_t = Y_t \ (\forall t \in [0,T])) = 1$ が成り立つということ。）

//

(1): Lipschitz連続性

(2): 線形増大性