# 確率数理要論12

- Girsanovの定理

Thm

- $\mu = (\mu_t(\omega))_t \in \mathcal{L}([0,T])$, $\sigma = (\sigma_t(\omega))_t \in \mathcal{L}^2([0,T])$
- $\frac{\mu}{\sigma} = \left(\frac{\mu_t(\omega)}{\sigma_t(\omega)}\right)_t \in \mathcal{L}^2([0,T])$

とする.

$$dX_t = \mu_t(\omega)\,dt + \sigma_t(\omega)\,dB_t \quad : \text{ドリフトあり}$$
$$d\tilde{X}_t = \sigma_t(\omega)\,dB_t \quad : \text{ドリフトなし}$$

また、

$$M_T(\omega) = \exp\left(-\int_0^T \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\mu_t^2}{\sigma_t^2}dt\right)$$
$$= \exp\left(-\int_0^T \frac{\mu_t}{\sigma_t}dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\mu_t^2}{\sigma_t^2}dt\right)$$

とする.

$E[M_T]=1$ であるとき、確率測度 $Q$ を $P$ に対して絶対連続で
$\frac{dQ}{dP}(\omega) = M_T(\omega)$ であるものとする.（$Q$が確率測度になることは保証できる.）
つまり, $Q(A) = E[\mathbb{1}_A M_T]$ $(A \in \mathcal{F})$ とする.

このとき、$Q$の下での $X$の分布は $P$の下での$\tilde{X}$の分布と等しい.
特に, $Q$の下で $(X_t)_t$ はマルチンゲールとなる. //

- $M_T$ は $Q$は$P$に対するRadon-Nikodym微分である.
- 1次元Gauss分布における以下の関係を無限次元に拡張したものと考えられる:

$$p(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{に対して}$$

$$\frac{\overset{Q}{p(x \mid 0,\sigma^2)}}{\underset{P}{p(x \mid \mu,\sigma^2)}} = \exp\left(\frac{\mu^2 - 2\mu x}{2\sigma^2}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{\mu^2 + 2\mu(x-\mu)}{2\sigma^2}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}\underbrace{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)$$

$P$のもとで標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

・$E[M_T]=1$ であるための条件としては
$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)^2dt\right)\right]<\infty \qquad (\text{Novikov条件})$$
が知られている。

**Cor**

$h\in\mathcal{L}^2([0,T])$ に対し、$M_T(\omega)=\exp\left(\int_0^T h_t(\omega)\,dB_t-\frac{1}{2}\int_0^T h_t(\omega)^2dt\right)$ が $E[M_T]=1$ をみたすとする。
$$W_t=B_t-\int_0^t h_s\,ds \qquad (0\leq t\leq T)$$
は、$dQ=M_T\,dP$ に関してBrown運動となる。 //

※ $E[M_T]=1$ について：

$$M_t=\exp\Big(\underbrace{\int_0^t h_s\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t h_s^2\,ds}_{X_t\text{ とおく}}\Big)$$ とおくと、
伊藤の補題より
$$\begin{aligned}dM_t&=\exp(X_t)\,dX_t+\frac{1}{2}\exp(X_t)(dX_t)^2\\&=M_t\,dX_t+\frac{1}{2}M_th_t^2\,dt\\&=M_t\left(-\cancel{\frac{1}{2}h_t^2dt}+h_t\,dB_t+\cancel{\frac{1}{2}h_t^2dt}\right)\\&=M_th_t\,dB_t\end{aligned}$$
である。$M_0=1$ より
$$M_t=1+\int_0^t M_sh_s\,dB_s$$
で、適当な可積分条件のもと、第2項はマルチンゲールなので、
$(M_t)_t$ もマルチンゲール。特に $E[M_T]=1$ である。

---

Girsanovの定理はヨーロピアン・オプションの適性な価格付けに用いられている。
（複製ポートフォリオ）

⇒ Black-Scholes・Mertonの方程式

## 生成作用素と後向き・前向き方程式

$x \in \mathbb{R}$ に対して、時間的に一様な拡散過程

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dB_s$$

を考える。$b, \sigma$ は Lipschitz 連続かつ線形増大とする。

**Def** (生成作用素)

$$Af(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E[f(X_\varepsilon^x)] - f(x)}{\varepsilon}$$

で定まる $A$ を $X_t^x$ の生成作用素という。

※ $X_t$ は時間的に一様なので、$A$ は $t$ に依存しない。
$X_t$ の分布を知りたい ⟶ 任意の関数 $f$ の期待値の性質を調べる。
(c.f. 特性関数, Portmanteau の定理)

**Lem**

$f \in C^2(\mathbb{R})$
$\tau$ : 停止時刻 s.t. $E_x[\tau] < \infty$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R})$
初期値 $X_0 = x$ で ~~条件~~ 付け

$$\Longrightarrow E_x[f(X_\tau^x)]$$
$$= f(x) + E_x\left[\int_0^\tau \left( b(X_t)\frac{\partial f}{\partial x}(X_t^x) + \frac{1}{2}\sigma(X_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t^x) \right) dt \right]$$
$(x \in \mathbb{R})$ //

(略証)

$Y_t = f(X_t)$ とすると、

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial x}(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t)\,\sigma^2(X_t)\,dt \qquad (\text{伊藤の公式})$$

$$\Longrightarrow Y_t - \underbrace{Y_0}_{f(x)} = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s)\,b(X_s)\,ds + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s)\,\sigma(X_s)\,dB_s}_{\text{マルチンゲール：期待値0, 任意抽出定理}}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s)\,\sigma^2(X_s)\,ds$$

$t=\tau$ を代入して期待値をとれば、確率積分の martingale 性と任意抽出定理より右辺第2項 $=0$ なので O.K. //

**Thm**

$f \in C^2(\mathbb{R})$ に対し、
$$Af(x) = b(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)$$ //

(∵) Lem より明らか. //

多次元の拡散過程に対しても Lem は成り立ち、

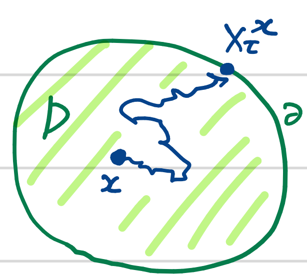
$$Af(x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{m}\sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \text{—} (*)$$

## - Dirichlet 境界値問題への応用

$D$: $\mathbb{R}^d$ 内の有界で連結な集合, 境界 $\partial D$ は十分なめらかとする.

偏微分方程式:
$$\begin{cases} Af(x) = 0 & (x \in D) \\ f(x) = \phi(x) & (x \in \partial D) \end{cases}$$
($A$ は $(*)$ で与えた形)

を考える. $X_t^x$ を対応する拡散過程として
$$\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^x(\omega) \in \partial D\}$$
とする.




**Thm**

$E[\tau] < \infty$ とする. この時、境界値問題の解 $f$ が存在するなら
$$f(x) = E_x[\phi(X_\tau)]$$
で表される. また、その解は一意である. //

(略証)

← 例えば $u(x)=E_x[\phi(X_\tau^x)]$

先の Lem より、$u$ を $u(x)=\phi(x)\ (x\in\partial D)$ をみたす関数とすると、

$$E_x[\phi(X_\tau)]=u(x)+E_x\left[\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right].$$

$x$ を $D$ の内点とする。

$$\underbrace{A\,E_x[\phi(X_\tau)]}_{x\text{の関数とみなす}}=Au(x)+A\,E_x\left[\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right]$$

$$=Au(x)+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{E_x\left[E_{X_\varepsilon^x}\left[\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right]\right]-E_x\left[\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right]\right\}$$

$$=Au(x)+\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{E_x\left[\int_\varepsilon^\tau Au(X_t)\,dt-\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right]\right\}$$

$$=Au(x)-E_x[Au(x)]=Au(x)-Au(x)=0$$

//

## Kolmogorov の後向き・前向き方程式

$$dX_t=b_t(X_t)\,dt+\sigma_t(X_t)\,dB_t \qquad (\text{一次元, 時間に非一様})$$

⟹ 対応する生成作用素

$$A_t=b_t(x)\frac{\partial}{\partial x}+\underbrace{\frac{\sigma_t^2(x)}{2}}_{=\,a_t(x)\text{ とする}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

・$X_t$ は Markov 過程になる。

⟹ $X_s=x$ の下での $X_t$ の条件付確率密度を

$$p(t,y\mid s,x) \qquad (\text{推移確率密度})$$

とする。

## Chapman-Kolmogorov の方程式

$$p(u,z\mid s,x)=\int p(u,z\mid t,y)\,p(t,y\mid s,x)\,dy \qquad (x,z\in\mathbb{R},\ u>t>s\geq0)$$

Thm

$a_t(x), b_t(x)$ は $t$ について連続で、$x$ について Lipschitz 連続かつ線形増大であるとする。また、$a_t(x) \geq \varepsilon > 0$ $(0 \leq {}^\forall t \leq T, {}^\forall x \in \mathbb{R})$ とする。
さらに、$\frac{\partial b_t}{\partial x}, \frac{\partial a_t}{\partial x}, \frac{\partial^2 a_t}{\partial x^2}$ も Lipschitz 連続かつ線形増大であるとする。

すると、$p$ は以下をみたす唯一の解である：

後向き方程式：
$$\frac{\partial p}{\partial s}(t,y|s,x) = -b_s(x)\frac{\partial p}{\partial x}(t,y|s,x) - a_s(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,y|s,x) = -A_s p(t,y|s,\cdot)|_x$$

前向き方程式：
$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,y|s,x) = -\frac{\partial}{\partial y}\{b_t(y)p(t,y|s,x)\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{a_t(y)p(t,y|s,x)\}$$
$$= A_t^* p(t,\cdot|s,x)|_y \quad (A_t \text{の共役作用素})$$

Fokker-Plank方程式とも言う

かつ $\lim_{t \to s} p(t,y|s,x) = \delta_x(y)$ (Dirac のデルタ関数)

(略証)

$\theta(t) = \int f(y)p(t,y|s,x)dy$ とする。($f \in C^2(\mathbb{R})$ は任意)

$$\theta(t+\varepsilon) = \int f(y)\left[\int p(t+\varepsilon,y|t,z)p(t,z|s,x)dz\right]dy$$
$$= \iint (f(y)-f(z)+f(z))p(t+\varepsilon,y|t,z)p(t,z|s,x)dzdy$$
$$= E\left[E_{X_t}[f(X_{t+\varepsilon})] - f(X_t) + f(X_t)\right]$$
$$\cong E\left[\varepsilon A_t f(X_t) + f(X_t)\right]$$
$$= \theta(t) + \varepsilon\int p(t,y|s,x)A_t f(y)dy$$
$$= \theta(t) + \varepsilon\int A_t^* p(t,y|s,x)f(y)dy \quad (\because \text{共役作用素の定義より})$$

よって、
$$\theta'(t) = \int f(y)A_t^* p(t,\cdot|s,x)|_y dy.$$

また
$$\theta'(t) = \int f(y)\frac{\partial}{\partial t}p(t,y|s,x)dy$$

なので、$\frac{\partial}{\partial t}p(t,y|s,x) = A_t^* p(t,y|s,x)$ を得る。 //

※ $\theta(t)$ を $u(t,x)$ と書くと、後向き方程式より $\frac{\partial}{\partial t}u = Au$ である。

例

$$dX_t = \mu dt + dB_t$$

(ドリフト付きBrown運動)

$$\Rightarrow \frac{\partial p_t}{\partial t} = -\mu \frac{\partial p_t}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_t}{\partial y^2}$$

$$p(t,y|s,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x-\mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right]$$

例 OU過程

$$X_t = e^{\mu t}X_0 + \sigma\int_0^t e^{\mu(t-s)}dB_s$$

$$p(t,y|s,x) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi\sigma^2[e^{2\mu(t-s)}-1]}} \exp\left\{-\frac{\mu[y-xe^{\mu(t-s)}]^2}{\sigma^2(e^{2\mu(t-s)}-1)}\right\}$$

→ $X_t$ の周辺分布は正規分布なので平均と分散を計算すれば求まる。

実際 $p(t,y|s,x)$ は前向き方程式をみたす。

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,y|s,x) = -\mu\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(p)$$

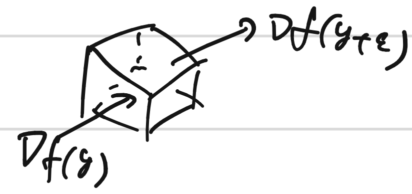
※ $\mu<0$ のとき、定常分布(かつ極限分布)は

$$p(y) = \lim_{t\to\infty} p(t,y|s,x) = \sqrt{\frac{-\mu}{\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(-\mu)}{\sigma^2}y^2\right)$$

(初期値 $x$ は指数関数的に忘れる。)

前向き方程式で $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ をみたす。

応用: 勾配ランジュバン動力学




$$dX_t = -\nabla f(X_t) + dB_t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_t}{\partial t} = -\nabla\left(\nabla f(y)\,p_t(y)\right) + \Delta p_t(y)$$

: Fokker-Plank方程式

「連続の方程式」とも呼ばれる。

$\Rightarrow$ $p_t(y) \propto \exp(-f(y))$ が定常分布 : $\frac{\partial p_t}{\partial t}=0$

$p(y)\propto\exp(-f(y))$ からサンプリングしたければ、勾配ランジュバン動力学に従って粒子をサンプリングすれば良い。