確率数理要論4

・確率分布の弱収束

Def（弱収束）

X_n：$\mathbb{R}^k$値確率変数 on $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ 異なって良い
F_n：X_nの分布関数
X：$\mathbb{R}^k$値確率変数 on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
F：Xの分布関数

X_nがXに弱収束する（分布収束，法則収束とも言う）

$\Longleftrightarrow$ 全てのFの連続点$x \in \mathbb{R}^k$において
$$F_n(x) \longrightarrow F(x)$$
//

P_nをF_nに対応する$(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$上の確率測度とおして．（つまり$P_n(A) = Q_n(X_n^{-1}(A))$）
$$X_n \xrightarrow{w} X, \quad F_n \xrightarrow{w} F, \quad P_n \xrightarrow{w} P$$
のように書く．

※ 確率収束，概収束と異なりX_nとXは同じ確率空間上で定義されている必要はない
あくまでそれぞれの分布が近くなるということ．

Ex.

X_nとXは独立で $P(X_n=1) = P(X_n=0) = \frac{1}{2}$
$P(X=1) = P(X=0) = \frac{1}{2}$

とすると，$|X_n - X| = 1$ w.p. $\frac{1}{2}$ なので．$X_n \xrightarrow{a.s.} X$でも
$X_n \xrightarrow{P} X$でもない．しかし．$F_n = F$ $(\forall n)$ なので．
$X_n \xrightarrow{w} X$ではある．
//

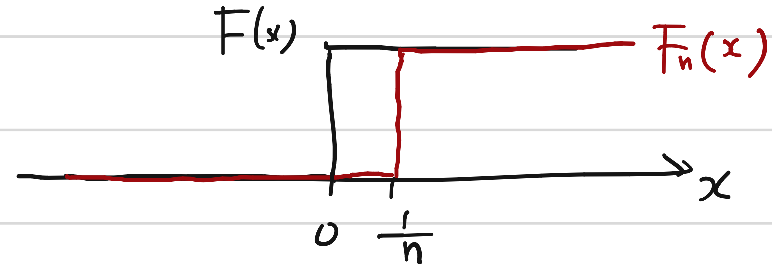
Ex.

$P_n = \delta_{\frac{1}{n}}$ (つまり、$P_n(A) = \begin{cases} 1 & (\frac{1}{n} \in A) \\ 0 & (\frac{1}{n} \notin A) \end{cases}$) の時.

$P = \delta_0$ とすると. $F_n = 1_{[\frac{1}{n}, \infty)}$, $F = 1_{[0, \infty)}$ なので、

$x \neq 0$ のとき. $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ より $P_n \rightsquigarrow P$

しかし、$F_n(0) \not\to F(0)$



Thm (Portmanteauの定理)

むしろ、これを定義とすることが多い

以下は全て同値

(1) $X_n \rightsquigarrow X$

(2) 任意の有界連続関数 $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して

$$E[f(X_n)] \longrightarrow E[f(X)]$$

(3) 任意の有界一様連続関数 $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して.

$$E[f(X_n)] \longrightarrow E[f(X)]$$

(4) 任意の閉集合 A に対して

$$\limsup_n P_n(A) \leq P(A)$$

(5) 任意の開集合 B に対して

$$\liminf_n P_n(A) \geq P(A)$$

(Proof)

(4)$\Leftrightarrow$(5) は自明 (∵ Aが閉 $\Leftrightarrow$ A^cが開 なので、補集合とることで一方からもう一方を示せる.)

(2)$\Rightarrow$(3) も自明

まず (1)$\Rightarrow$(2) を示す

↓次ページ

(1) $\Longrightarrow$ (2)

$k=1$ として証明する。$k\geqq 2$ でも同様。

$\varepsilon>0$ を任意に取って来る。

すると、確率の連続性より、ある M が存在して

$$F(-M)\leqq \varepsilon,\quad F(M)\geqq 1-\varepsilon$$

とできる。しかも、F の不連続点は高々可算個なので

$-M, M$ ともに F の連続点とすることができる。

これより、十分大きな N に対して、$\forall n\geqq N$ で

$$F_n(-M)\leqq 2\varepsilon,\quad F_n(M)\geqq 1-2\varepsilon$$

とできる。($\because X_n \xrightarrow{w} X$ の定義より)

このとき、f は連続なので $[-M, M]$ 上で一様連続。

よって、ある $-M=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_k=M$ があって、

$$\max_{1\leqq i\leqq k}\ \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} |f(x)-f(x_{i+1})|\leqq\varepsilon$$

かつ、各 x_i が F の連続点となるようにできる。

このとき、

$$f_\varepsilon(x)=\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)\,\mathbb{1}_{(x_i, x_{i+1}]}(x)$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)\left\{\mathbb{1}_{(-\infty, x_{i+1}]}(x)-\mathbb{1}_{(-\infty, x_i]}(x)\right\}$$

とすれば

$$\sup_{x\in[-M,M]} |f(x)-f_\varepsilon(x)|\leqq\varepsilon$$

である。また、

$$E[f_\varepsilon(X_n)]=\sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)\left(F_n(x_{i+1})-F_n(x_i)\right)$$

なので、$X_n \xrightarrow{w} X$ より

$$\lim_{n\to\infty} E[f_\varepsilon(X_n)]=E[f_\varepsilon(X)]$$

が成り立つ。よって、

$$\left|E[f_\varepsilon(X_n)]-E[f(X_n)]\right|\leqq E\left[\,|f_\varepsilon(X_n)-f(X_n)|\,\right]$$
$$=\int_{(-\infty,-M]}|f_\varepsilon-f|\,dP_n+\int_{(-M,M]}|f_\varepsilon-f|\,dP_n+\int_{(M,\infty)}|f_\varepsilon-f|\,dP_n$$
$$\leqq 2\sup_x|f(x)|\cdot 2\varepsilon+\varepsilon=(4\|f\|_\infty+1)\cdot\varepsilon\qquad\left(\|f\|_\infty=\sup_x|f(x)|\right)$$

同様にして、 $E[|f_\varepsilon(X) - f(X)|] \leqq (4\|f\|_\infty + 1)\cdot\varepsilon$ とできる。

以上より、

$$\limsup_{n\to\infty} |E[f(X_n)] - E[f(X)]|$$

$$\begin{aligned}
\leqq\ & \limsup |E[f(X_n)] - E[f_\varepsilon(X_n)]| \\
& + \underbrace{\limsup |E[f_\varepsilon(X_n)] - E[f_\varepsilon(X)]|}_{=0} \\
& + \limsup |E[f_\varepsilon(X)] - E[f(X)]| \\
\leqq\ & 2(4\|f\|_\infty + 1)\cdot\varepsilon
\end{aligned}$$

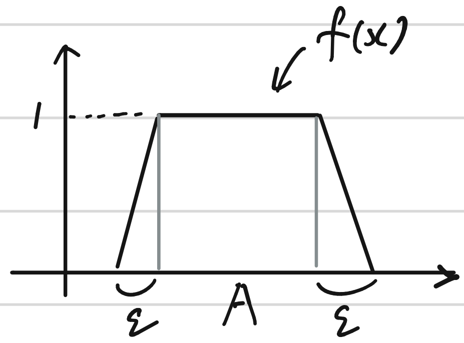
εは任意なので、$\varepsilon \searrow 0$ とすることで(2)が示せる。 //

(3) ⇒ (4)

任意の$\varepsilon > 0$に対し、閉集合Aについて

$$f(x) = \max\left\{0,\ 1 - \frac{d(x,A)}{\varepsilon}\right\}$$

とする。ただし、 $d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x - y\|$.



すると、fは有界一様連続である。

$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x,A) \leqq \varepsilon\}$ とすると、(3)より

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(A) \leqq \limsup_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)] \leqq P(A_\varepsilon)$$

εは任意なので、確率の連続性より $\lim_{\varepsilon\searrow 0} P(A_\varepsilon) = P(A)$ である。

よって示された。 //

ここで閉であることを使った。

$\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = A$

(4), (5) ⇒ (1)

x: Fの連続点とする。

$A = (-\infty, x]$ は閉集合なので、(4)より

$$\limsup F_n(x) = \limsup P_n(A) \leqq P(A) = F(x).$$

xはFの連続点なので、 $\forall\delta > 0,\ \exists\varepsilon > 0$ s.t.

$$|F(x-\varepsilon) - F(x)| \leqq \delta.$$

この時、(5)より、

$$\liminf F_n(x) \geqq \liminf P_n\left(\left(-\infty, x - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \geqq P\left(\left(-\infty, x - \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

(4), (5) $\Rightarrow$ (1)

x : F の連続点とする.

$A = (-\infty, x]$ は閉集合なので. (4) より

$$\limsup F_n(x) = \limsup P_n(A) \leqq P(A) = F(x).$$

一方. (5) より.

$$\begin{aligned}\liminf F_n(x) &\geqq \liminf P_n\left(\left(-\infty, x-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\ &\geqq P\left(\left(-\infty, x-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \qquad (\because (5)) \\ &\geqq P\left(\left(-\infty, x-\varepsilon\right]\right) = F(x-\varepsilon)\end{aligned}$$

よって.

$$F(x-\varepsilon) \leqq \liminf F_n(x) \leqq \limsup F_n(x) \leqq F(x)$$

x は連続点なので. $\varepsilon \to 0$ で $\lim F_n(x) = F(x)$ を得る.

//

<u>Thm</u> (連続写像定理)

$X_n \rightsquigarrow X$ なら

連続関数 $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ に対して.

$f(X_n) \rightsquigarrow f(X)$

(Proof)

任意の有界連続関数 $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ に対し

$h \circ f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ も有界連続なので.

$E[h \circ f(X_n)] \longrightarrow E[h \circ f(X)] \quad (\because X_n \rightsquigarrow X)$.

これは同時に $f(X_n) \rightsquigarrow f(X)$ も示している.

//

Thm

$X_n \xrightarrow{p} X$ なら $X_n \rightsquigarrow X$ (逆はダメ)

Proof

任意の閉集合 A に対し, $\forall \varepsilon$ で

$$P_n(A) \leqq \underbrace{P(|X_n - X| \geqq \varepsilon)}_{\longrightarrow 0 \ (n\to\infty)} + P(X \in A_\varepsilon)$$

よって. $\limsup P_n(A) \leqq P(A_\varepsilon)$.

$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $P(A_\varepsilon) \longrightarrow P(A)$ より. $\limsup P_n(A) \leqq P(A)$.

つまり. $X_n \rightsquigarrow X$ by Portmanteau.

//

Cor

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \implies X_n \xrightarrow{p} X \implies X_n \rightsquigarrow X$$

・ 極値分布

$X_1, \cdots, X_n \sim G$ (i.i.d.) のとき.

$M_n := \max\{X_1, \cdots, X_n\}$ の分布に興味がある.

(応用例: リスク分析)

M_nの分布

$$F_n(x) := P(M_n \leqq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqq x) = G^n(x)$$

を極値分布と言う.

<u>Ex.</u> (Gumbel分布)

$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (\alpha \geq 0) : 指数分布$$

$$\Longrightarrow F_n(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha x})^n & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

ここで. $^\forall x$ で $F_n(x) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ なので、F_nは何らかの分布関数に弱収束しない.

そこで.

$$M_n - \alpha^{-1} \log(n) \quad (平均をずらす)$$

の分布を考える.

$$P(M_n - \alpha^{-1} \log(n) \leqq x)$$

$$= P(M_n \leqq x + \alpha^{-1} \log(n))$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-(\alpha x + \log(n))})^n & (x \geqq -\frac{1}{\alpha} \log(n)) \\ 0 & (x < -\frac{1}{\alpha} \log(n)) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (1 - \frac{1}{n} e^{-\alpha x})^n & (\quad ; \quad) \\ 0 & (\quad ; \quad) \end{cases}$$

ここで.

$$\left(1-\frac{1}{n}e^{-\alpha x}\right)^n \longrightarrow e^{-e^{-\alpha x}}$$

がわかる.

$$F(x) := e^{-e^{-\alpha x}} \quad : \underline{\text{Gumbel 分布}}$$

$$M_n - \alpha^{-1}\log(n) \rightsquigarrow \text{Gumbel 分布}.$$

<u>Ex.</u> (Fréchet 分布)

$$G(x) = \begin{cases} 1-x^{-\alpha} & (x \geqq 1) \\ 0 & (x<1) \end{cases} \quad (\alpha>0) : \text{パレート分布}$$

このとき.

$$F_n(x) = (1-x^{-\alpha})^n \quad (x \geqq 1)$$

これも $F_n(x) \longrightarrow 0 \quad (\forall x)$

代わりに. $\dfrac{M_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$ を考える.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \leqq x\right) &= F_n\left(M_n \leqq n^{\frac{1}{\alpha}}x\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{n}x^{-\alpha}\right)^n \\ &\xrightarrow{n\to\infty} e^{-x^{-\alpha}} \end{aligned}$$

$$F(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}} & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases} \quad : \text{Fréchet 分布}.$$

Ex. (Weibull分布)

$$G(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ 1-(1-x)^{\alpha} & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$: Beta分布の特殊例)

$(\alpha > 0)$

このとき、

$$F_n(x) = \{1-(1-x)^{\alpha}\}^n \quad (0 \leq x \leq 1)$$

これは、1に退化した分布に収束 (1点のpoint massになる)

そこで、$n^{\frac{1}{\alpha}}(M_n - 1)$ を代わりに考えると、

$$P(n^{\frac{1}{\alpha}}(M_n - 1) \leq x) \xrightarrow{n \to \infty} F(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ e^{-(-x)^{\alpha}} & (x < 0) \end{cases}$$

: Weibull分布

※実際は $-X$ を Weibull分布と呼ぶことが多い。

Thm

$X_1, \ldots, X_n \sim G$ (i.i.d.)

$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$

$\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}$ s.t. $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ が退化しない分布に収束 (1点に収束しない)

$\Longrightarrow$ 分布の収束先は Gumbel, Fréchet, Weibull のどれかになる。

つまり、裾の落ち方が
- 指数オーダー $\longrightarrow$ Gumbel
- 多項式オーダー $\longrightarrow$ Fréchet
- 有界サポート $\longrightarrow$ Weibull

と、落ち方の速さで決まる。