

確率数理要論 5

○ 特性関数

Def

X : r.v. に対し.

$$\phi(t) = E[e^{itX}] \quad (t \in \mathbb{R})$$

を特性関数と呼ぶ. (characteristic function)

* $|e^{itX}| \leq 1$ より、期待値は常に存在.

* \mathbb{R}^k -値 r.v. に対し $\phi(t) = E[e^{it^T X}]$ ($t \in \mathbb{R}^k$) とすれば、同様に特性関数を定義できる. 以下の話は \mathbb{R}^k 値でも成り立つ.

Lem

$\phi(0) = 1$, $|\phi(t)| \leq 1$ ($\forall t \in \mathbb{R}$), $\phi(t)$ は一様連続 //

Lem

X : r.v.

ϕ : 特性関数

ある $k > 0$ で $E[|X|^k] < \infty$ なら

ϕ は $\forall t \in \mathbb{R}$ で k 回連続微分可能で $\phi^{(k)}(0) = i^k E[X^k]$ である. //

(Proof) $\frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itX} = (iX)^k e^{itX}$ である.

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itX} \right| \leq |X|^k \quad \text{かつ} \quad |X|^k \text{ は可積分}$$

よって微分と積分が交換できる. (講義第2回目へ参照)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} E[e^{itX}] = E\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itX}\right] = E[(iX)^k e^{itX}]$$

特に $t=0$ のとき、右辺 = $E[(iX)^k]$ である.

さらに、右辺は t についても連続であることも優収束定理 (*) を示せる. //

Ex.

(1) 正規分布 ($N(\mu, \sigma^2)$)

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad : \text{p.d.f.}$$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x|\mu, \sigma^2) dx \\ &= \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \quad (\text{フーリエの積分定理}) \end{aligned}$$

(2) Cauchy 分布

$$f(x|c) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2+c^2} \quad (c>0) \quad (\text{平均は存在しない})$$

$$\phi(t) = e^{-c|t|} \quad (\text{留数定理})$$

Lem

X_1, \dots, X_n : 独立な r.v.

$\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$: X_i の特性関数

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の特性関数は

$$\phi(t) = E[e^{itS_n}] = \prod_{i=1}^n \phi_i(t)$$

(Proof) $e^{itS_n} = \prod_{i=1}^n e^{itX_i}$ と独立な確率変数の積になるので、

独立な r.v. の積の期待値が各期待値の積になることより従う。 //

Thm

P, Q : 2つの分布

$$P=Q \iff \phi_P(t) = \phi_Q(t) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

ただし、 ϕ_P, ϕ_Q は P, Q に対する特性関数 //

(\Rightarrow) は自明

(\Leftarrow) を示すため、以下の補題を用意する。

Lem

$X \sim P, Y \sim Q$, X と Y は独立な r.v. とする.

$X+Y$ の分布は畳み込み分布 $P * Q$ に従う:

$$(P * Q)(A) = \int P(A-x) dQ(x). \quad (A-x := \{x'-x \mid x' \in A\})$$

特に, X が密度 $f(x)$ を持つなら

$P * Q$ も密度を持つ, $h(x) = \int f(x-y) dQ(y)$ と与えられる.

Proof

$Z = X+Y$ とすると, $Z \in A$ である確率は

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_A(Z)] &= E[\mathbb{1}_A(X+Y)] \\ &\begin{cases} Z \in A \Rightarrow 1 \\ Z \notin A \Rightarrow 0 \end{cases} = \iint \mathbb{1}_A(x+y) dP(x) dQ(y) && (X \text{ と } Y \text{ は独立, Fubini}) \\ &= \iint \mathbb{1}_{A-y}(x) dP(x) dQ(y) \\ &= \int P(A-y) dQ(y) \end{aligned}$$

特に, X が密度 f を持つとき,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \iint \mathbb{1}_A(x+y) f(x) dx dQ(y) \\ &= \iint \mathbb{1}_A(u) f(u-y) du dQ(y) \\ &= \int_A \underbrace{\left(\int f(u-y) dQ(y) \right)}_{h(u)} du && (\text{Fubini}) \end{aligned}$$

よって, h は $P * Q$ の密度になっている. //

$X \sim P, Y \sim N(0, \sigma^2)$ のとき (X, Y は独立)

$Z = X+Y$ の分布は $P^{(\sigma)} = P * N(0, \sigma^2)$ と与えられる.

Lem

P の特徴関数が $g(t) = \int e^{itx} dP(x)$ と与えられる時,

$P^{(\sigma)}$ は密度

$$f^{(\sigma)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int g(t) \exp(-itx - \frac{\sigma^2 t^2}{2}) dt$$

を持つ.

(Proof)

→ 次回へ

先の Lem 5') $N(0, \sigma^2)$ の密度

$$\begin{aligned}
 f^{(\sigma)}(x) &= \int \varphi_{\sigma}(x-y) dP(y) \\
 &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left[i(y-x)t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] dt \right) dP(y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \underbrace{\left(\int e^{it y} dP(y) \right)}_{g(t)} e^{-itx - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(t) e^{-itx - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} dt \quad //
 \end{aligned}$$

Lem

$\sigma \rightarrow 0$ 2. $P^{(\sigma)} \rightsquigarrow P$ 2. あり.

(Proof)

$X \sim P, Y \sim N(0, \sigma^2)$ のとき.

$X+Y \xrightarrow{P} X$ ($\sigma \rightarrow 0$) は示さねば. $(P(|X+Y-X| \geq \varepsilon)$

特 2.

$$= P(|Y| \geq \varepsilon) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0)$$

$X+Y \rightsquigarrow X$

2. あり. $X+Y \sim P^{(\sigma)}, X \sim P$ 5') 示さねば. //

(Thm の \Leftarrow の証明)

$\phi_P = \phi_Q$ なら, $P^{(\sigma)}$ と $Q^{(\sigma)}$ は同じ密度関数 $f^{(\sigma)}$ を持つ.

よ 2. $P^{(\sigma)} = Q^{(\sigma)}$ 2. あり.

(先の Lem 5')

また, $P^{(\sigma)} \rightsquigarrow P, Q^{(\sigma)} \rightsquigarrow Q$ 5').

f に ϕ_P, ϕ_Q を代入.

$\forall f$: 有界連続 1. 2. あり.

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int f(x) dP^{(\sigma)}(x) = \int f(x) dP(x)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int f(x) dQ^{(\sigma)}(x) = \int f(x) dQ(x)$$

よ 1). $\int f dP = \int f dQ$ ($\forall f$: 有界連続).

特 2. $P = Q$ //

* この証明は多変量 r.v. 2. 2. あり.

Ex. (安定分布)

ある a_n が存在して、i.i.d. 列 X_n に対して、 $a_n \sum_{i=1}^n X_i$ の分布が n に対して変わらないとき、安定分布 と言う。

(1) 正規分布:

$$X_1, \dots, X_n \sim N(0,1) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i / \sqrt{n} \sim N(0,1) \quad (\forall n)$$

$$(\because) E[e^{it(\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}})}] = \prod_{i=1}^n E[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}} X_i}] = \prod_{i=1}^n e^{-\frac{\sigma^2}{2n}} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$$

↑
N(0,1) の c.f.

(2) Cauchy 分布:

$$X_1, \dots, X_n \sim \text{Cauchy}(c) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim \text{Cauchy}(c)$$

$$(\because) E[e^{it(\frac{\sum X_i}{n})}] = \prod_{i=1}^n E[e^{i\frac{t}{n} X_i}] = \prod_{i=1}^n e^{-|c| \frac{t}{n}} = e^{-|c|t}$$

↑
Cauchy(c) の c.f.

Thm (Lévyの連続性定理)

$(X_n)_{n=1}^{\infty}$ を r.v. の列として、 $\phi_n(t) = E[e^{itX_n}]$ とする。

1. ある r.v. X が存在して、その c.f. が $\phi(t)$ であるとする。

このとき、

$$X_n \rightsquigarrow X \Rightarrow \phi_n(t) \rightarrow \phi(t) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

各点収束

2. ある関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在して、 $\forall t \in \mathbb{R}$ で

$\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ かつ、 ϕ が $t=0$ で連続なら、

ϕ はある r.v. X の特性関数で、 $X_n \rightsquigarrow X$ である。

(Proof) 1. は Portmanteau の定理を示せる。

2. は難しい。(証明は本補足資料)

ここで2の代わりに以下を考える.

Lévyの連続性定理 2':

$(X_n)_n$ が緊密 (タイト) で、 $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) なら
 ϕ はある r.v. X の c.f. で $X_n \rightsquigarrow X$ である.

(2'の proof)

Lem (Prokhorovの定理)

1. $X_n \rightsquigarrow X$ なら $(X_n)_n$ は緊密.
2. $(X_n)_n$ が緊密なら部分列 $(X_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ が存在して、
ある r.v. X に弱収束 $X_{n_j} \rightsquigarrow X$ する.

※ X トリックスペースのコンパクト集合は点列コンパクト
(\mathbb{R} 上の有界点列は収束部分列を持つ.)

(証明は後述. webの補足資料を参照)

$(X_n)_n$ は $O_p(1)$ (緊密) なので、任意の部分列 $(X_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ も $O_p(1)$ であり、
さらに部分列 $(X_{n_{j_k}})_{k=1}^{\infty}$ が存在して、ある r.v. X に $X_{n_{j_k}} \rightsquigarrow X$ となる。
(by Prokhorov)

よって、 X の c.f. を $\tilde{\phi}(t)$ と書くと、 $\phi_{n_{j_k}}(t) \rightarrow \tilde{\phi}(t)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) となる。
仮定より $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$ であるので、 $\tilde{\phi}(t) = \phi(t)$ がわかる。
つまり、 ϕ は X の c.f. (これは部分列の取り方によらずに成り立つ.)

ここで、もし $X_n \rightsquigarrow X$ となければ、 $\exists f$: 有界連続で、 $E[f(X_n)] \not\rightarrow E[f(X)]$.
特に、ある部分列をとり、 $|E[f(X_{n_j})] - E[f(X)]| \geq \varepsilon$ ($\forall j$) と
できる。しかし、さらに部分列 $(X_{n_{j_k}})_{k=1}^{\infty}$ をとると、

$X_{n_{j_k}} \rightsquigarrow X$ により $|E[f(X_{n_{j_k}})] - E[f(X)]| \rightarrow 0$ とできてしまうので、
矛盾である。よって、 $X_n \rightsquigarrow X$.



Thm (中心極限定理)

$(X_n)_{n=1}^{\infty}$: 平均 μ , 分散 σ^2 の i.i.d. r.v. 列

このとき, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ に対し,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

//

* $\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ ではない。

* $\frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{a.s.} 0$ はわかるとも, \sqrt{n} 倍して膨らませると, ちょうど正規分布になる。

(Proof) $Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right)$ とおくと,

$$\begin{aligned} E[Z_n^2] &= \frac{n}{\sigma^2} E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{n} \right)^2 \right] = \frac{n}{\sigma^2} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } P(|Z_n| \geq M) \leq \frac{E[|Z_n|^2]}{M^2} \leq \frac{1}{M^2} \quad \text{とわかる。}$$

Z_n は緊密である。

よって, Lévy の連続性定理 (2' 版), Z_n の c.f. が $N(0, 1)$ の c.f. と各点収束すれば良い。

$$\begin{aligned} Z_n \text{ の c.f.} &= E[e^{itZ_n}] = E\left[e^{it \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}} \right] = \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \phi_n(t) \text{ とおく} \quad \quad \quad \frac{X_i - \mu}{\sigma} \text{ の c.f.} \end{aligned}$$

ここで, $\frac{X_i - \mu}{\sigma}$ の平均は 0 で分散は 1 なのだから,

ϕ は 2 階連続微分可能である。

$$\phi(t) = 1 + \underbrace{t \phi'(0)}_0 + \underbrace{\frac{t^2}{2} \phi''(0)}_{-1} + o(t^2)$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

と展開できる。よって, $\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$ である。

$$\phi_n(t) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

よって示すには,

$N(0, 1)$ の c.f.

//

Prokhorov の定理の証明.

1. は簡単なので省略
2. F_n を X_n の分布関数とする.

\mathbb{Q} を有理数の集合とする. \mathbb{Q} は可算集合なので, \mathbb{Q} の各元は q_1, q_2, \dots のように番号を振ることができる.

今 $(F_n(q_1))_{n=1}^{\infty}$ は $[0, 1]$ に含まれる数列なので, ある部分列 $(F_{n_j^{(1)}}(q_1))_{j=1}^{\infty}$ が存在し, ある値に収束するようにできる.

同様に, ある部分列 $(n_j^{(2)})_{j=1}^{\infty} \subset (n_j^{(1)})_{j=1}^{\infty}$ が存在し,

$(F_{n_j^{(2)}}(q_2))_{j=1}^{\infty}$ も収束させることができる. 以下, 同様にして,

$$(n_j^{(1)})_{j=1}^{\infty} \supset (n_j^{(2)})_{j=1}^{\infty} \supset (n_j^{(3)})_{j=1}^{\infty} \supset \dots$$

なる数列の列を得る.

そこで, $n_j = n_j^{(j)}$ とすると,

任意の $q \in \mathbb{Q}$ において, $(F_{n_j}(q))_{j=1}^{\infty}$ は収束する.

この収束先を $G(q)$ とする. G の構成法より $G(q) \leq G(q')$ ($\forall q \leq q'$).

しかし, G は \mathbb{Q} 上でのみ定義したものので, \mathbb{R} 上に拡張する:

$$F(x) = \inf \{ G(q) \mid q > x \} = \lim_{q \downarrow x} G(q).$$

↑
 \geq は $<$ $>$ であることに注意.

すると, F は単調非減少で, 右連続.

なぜなら, $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\exists q \in \mathbb{Q}$ であり $q > x$ かつ $|F(x) - G(q)| \leq \varepsilon$ となる.

このとき, $x \leq y < q$ において $F(x) \leq F(y) \leq G(q)$ かつ $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$

である. したがって, 右連続.

さらに, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ である. これは, $(X_n)_n$ が

緊密であることから, $\forall \varepsilon > 0$ において $\exists M > 0$ であり, $\sup_j F_{n_j}(-M) \leq \varepsilon$ かつ

$\inf_j F_{n_j}(M) \geq 1 - \varepsilon$ である. よって, $F(-M) \leq \varepsilon$, $F(M) \geq 1 - \varepsilon$ である.

$\varepsilon > 0$ とする. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ かつわかる.

以上より, F はある分布の分布関数である. X をこの分布に従う r.v. とする.

↳ 次のように続く.

あとは、 F の連続点 x において、 $F_{n_j}(x) \rightarrow F(x)$ を示せばいい。

$X_{n_j} \rightsquigarrow X$ と言える。

x において F は連続なので、 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\exists \delta < x < \delta'$ なる

$|G(\delta') - G(\delta)| \leq \epsilon$ かつ、 $G(\delta) \leq F(x) \leq G(\delta')$ となる。

よって、

$$G(\delta) = \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(\delta) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(\delta') = G(\delta')$$

が成り立つ。よって、 $\epsilon > 0$ に対して、 $\lim_{j \rightarrow \infty} F_{n_j}(x) = F(x)$ を得る。

