確率数理要論6

条件付き期待値

これまで独立なr.v.の最大値や平均を考えてきたが、
非独立なr.v.の組を考える上で条件付期待や条件付き確率は重要である。

まず有限分割の場合から始める。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間
$B \in \mathcal{F}$ を $P(B) > 0$ をみたす事象とする。
$\forall A \in \mathcal{F}$ に対し、Bで条件付けたAの条件付き確率を

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

とする。これが確率測度になっていることはすぐわかる。
（つまり、$A \in \mathcal{F} \longmapsto P(A|B)$ が確率測度）
ここで、$B^c \in \mathcal{F}$ も $P(B^c) > 0$ をみたすとすると、

$$P(\cdot|B),\ P(\cdot|B^c)$$

がそれぞれ定まる。つまり、$\forall A \in \mathcal{F}$ に対し、確率変数

$$\Omega \ni \omega \longmapsto \begin{cases} P(A|B) & (\omega \in B) \\ P(A|B^c) & (\omega \in B^c) \end{cases}$$
$$= P(A|B)\mathbb{1}_B(\omega) + P(A|B^c)\mathbb{1}_{B^c}(\omega)$$
$$=: P(A|\{B, B^c\})(\omega)$$

が定まる。
また、可積分なXに対して、Xの$P(\cdot|B)$による期待値を条件付き期待値という。

$$E[X|B] \qquad \left(\text{つまり、} E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \underline{\int_B X\, dP(\omega)}\right)$$

$\int \mathbb{1}_B(\omega) X(\omega) dP(\omega)$ という意味

と書く。これについても

$$E[X|\{B, B^c\}](\omega) = E[X|B]\mathbb{1}_B(\omega) + E[X|B^c]\mathbb{1}_{B^c}(\omega)$$

なる確率変数が定まる。

これを有限分割 $\{B_i\}_{i=1}^n$ $\left(B_i\cap B_j=\phi\ (i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^n B_i=\Omega,\ P(B_i)>0\right)$
に拡張して

$$P(A|\{B_i\}_{i=1}^n)(\omega) := \sum_{i=1}^n P(A|B_i)\mathbb{1}_{B_i}(\omega)$$

$$E[X|\{B_i\}_{i=1}^n](\omega) := \sum_{i=1}^n E[X|B_i]\mathbb{1}_{B_i}(\omega)$$

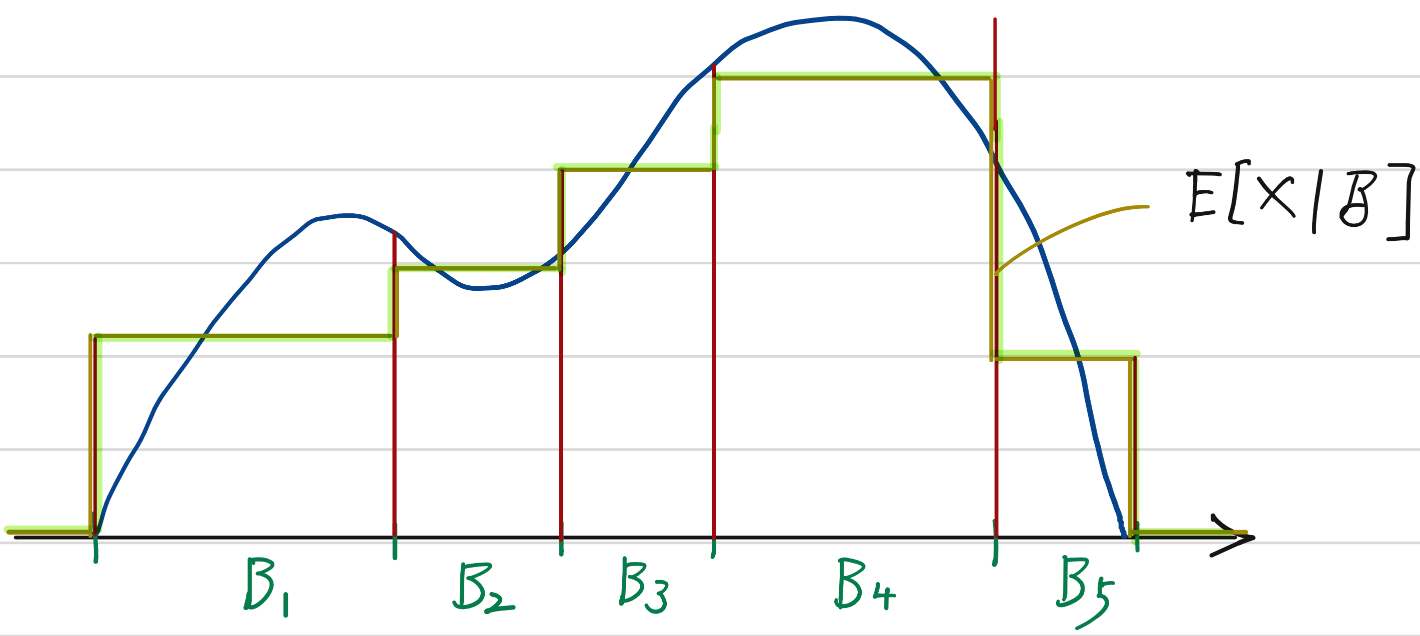
なる確率変数が定まる.

$\{B_i\}_{i=1}^n$ を与えることと, $\{B_i\}_{i=1}^n$ で生成されるσ-加法族 $\mathcal{B}$ を与えることは同値なので

$P(A|\mathcal{B})$, $E[X|\mathcal{B}]$

と書く.

$X=\mathbb{1}_A$ なら, $E[X|\mathcal{B}]=P(A|\mathcal{B})$ となることは期待値の定義から
すぐ確認できる.



Thm

1. $E[X|\mathcal{B}]$ は $\mathcal{B}$-可測

2. $^\forall G \in \mathcal{B}$ に対し、

$$\int_G E[X|\mathcal{B}]\,dP(\omega) = \int_G X\,dP(\omega)$$

//

※ $E[X|\mathcal{B}]$ が $\mathcal{F}$-可測なのはすぐ示されるが、1はより強いことを言っている。
($\mathcal{B}$ は $\mathcal{F}$ の部分σ-加法族)

※ $G \in \mathcal{B}$ ということは、ある $I \subset \{1,2,\dots,n\}$ が存在して、($I=\phi$ も許す)
$G = \bigcup_{i\in I} B_i$ と書けることに注意。

(Proof)

1. $^\forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、$I_C = \{i \mid E[X|B_i] \in C\}$ とおけば
$E[X|\mathcal{B}]^{-1}(C) = \bigcup_{i\in I_C} B_i$ であるが、

$\bigcup_{i\in I_C} B_i \in \mathcal{B}$ であるので、$E[X|\mathcal{B}]^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ である。

2. $^\forall G \in \mathcal{B}$ は、ある $I \subset \{1,\dots,n\}$ を用いて、$G = \bigcup_{i\in I} B_i$ と書ける。
よって、

$$\begin{aligned}
\int_G E[X|\mathcal{B}]\,dP(\omega) &= \sum_{i\in I} \int_{B_i} E[X|\mathcal{B}]\,dP(\omega) \\
&= \sum_{i\in I} \int_{B_i} \sum_{j=1}^{n} E[X|B_j]\,\mathbb{1}_{B_j}(\omega)\,dP(\omega) \\
&= \sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{n} E[X|B_j] \int_{B_i} \mathbb{1}_{B_j}(\omega)\,dP(\omega) \\
&= \sum_{i\in I} \sum_{j=1}^{n} E[X|B_j]\,P(B_i)\,\delta_{ij} \\
&= \sum_{i\in I} P(B_i)\,E[X|B_i] \\
&= \sum_{i\in I} P(B_i) \frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X\,dP(\omega) \\
&= \sum_{i\in I} \int \mathbb{1}_{B_i} X\,dP(\omega) = \int \Big(\sum_{i\in I} \mathbb{1}_{B_i}\Big) X\,dP(\omega) \\
&= \int \mathbb{1}_{\bigcup_{i\in I} B_i} X\,dP(\omega) = \int \mathbb{1}_G X\,dP(\omega) = \int_G X\,dP(\omega)
\end{aligned}$$

//

これを一般化しよう。

$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする。

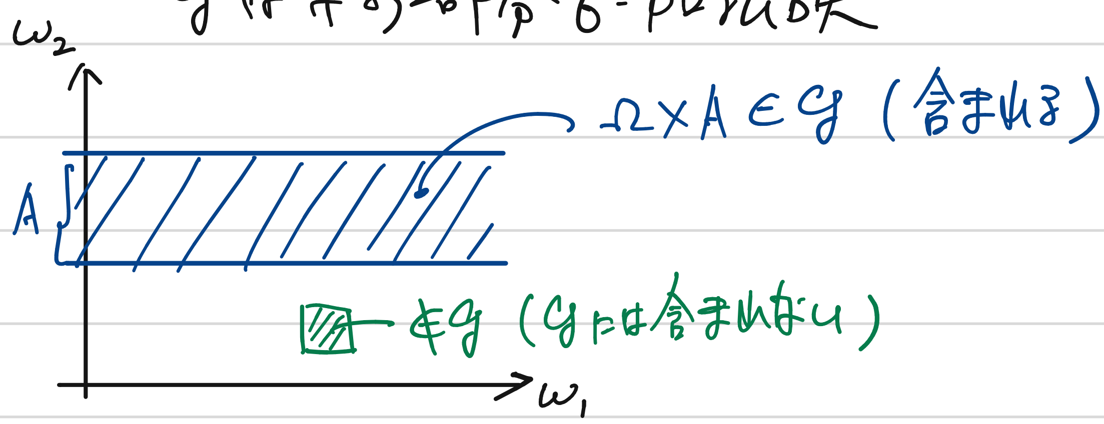
<u>例</u>. $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

$\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$, $X(\omega) = \omega_1$, $Y(\omega) = \omega_2$ のとき、

$$\mathcal{G} = \sigma(Y) = \{Y^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \{\Omega \times A \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

このとき、

$\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族



//

Def (条件付き期待値)

X: 可積分な r.v. on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

X の $\mathcal{G}$ で条件付けた条件付き期待値 $E[X|\mathcal{G}]$ とは、

1. $\mathcal{G}$-可測である。
2. $^\forall G \in \mathcal{G}$ に対し、

$$\int_G E[X|\mathcal{G}]\, dP(\omega) = \int_G X\, dP(\omega)$$

を満たす確率変数として定義される。 //

特に、$A \in \mathcal{F}$ に対して、$X = \mathbb{1}_A$ を代入して、

$$P(A|\mathcal{G}) = E[\mathbb{1}_A|\mathcal{G}]$$

を A の ($\mathcal{G}$ で条件付けた) <u>条件付き確率</u> と言う。

では、そのような確率変数は存在するであろうか？

(1.2. より $P|_\mathcal{G}$-a.s. での一意性は言える。($P|_\mathcal{G}$ は $\mathcal{G}$ に制限した P)
なぜならもし Z_1, Z_2 が 1.2. をみたしつつ、$P(Z_1 > Z_2 + \varepsilon) > \varepsilon$ なら、
$G = \{Z_1 > Z_2 + \varepsilon\}$ とすると、$\underbrace{\int_G Z_1\, dP}_{= \int_G X\, dP} \geq \int_G Z_2\, dP + \varepsilon P(G) \geq \int_G X\, dP + \varepsilon^2$ で矛盾。)
(∵ 2より)

Thm（Radon-Nikodymの定理）

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間
ν：$(\Omega, \mathcal{F})$上の非負かつ有界な測度で P に対して絶対連続、
つまり、$P(A)=0$ なら $\nu(A)=0$ をみたすものとする（$\nu \ll P$ と書く）
このとき、P-可積分な r.v. X が存在して、

$$\nu(A) = \int_A X \, dP \qquad (\forall A \in \mathcal{F})$$

が成り立つ。しかも、X は P-a.s. で一意に定まる。 //

X を Radon-Nikodym 微分と言い $X = \frac{d\nu}{dP}$ と書く。
（証明は、例えば Resnik：A probability Path を参照。）

Thm（条件付き期待値の存在）

X が可積分なら条件1,2をみたす確率変数 $E[X|\mathcal{G}]$ が存在する。
しかも、2つの r.v. Z_1, Z_2 がともに条件1,2をみたすなら

$$Z_1 = Z_2 \qquad (P|_\mathcal{G}\text{-a.s.})$$

P を $\mathcal{G}$ に制限した測度
が成り立つ。
この意味で条件付き期待値は $P|_\mathcal{G}$-a.s. で一意。 //

(Proof)

$X \geq 0$ の場合を考える。
$E[|X|] < \infty$ より、

$$\nu(A) = \int_A X \, dP \qquad (\forall A \in \mathcal{G})$$

とすれば、ν は $\mathcal{G}$ 上の非負有界な測度である。
しかも、$P(A)=0$ $(A \in \mathcal{G})$ なら $\nu(A)=0$ もすぐわかる。
つまり、$\nu \ll P|_\mathcal{G}$。
よって、Radon-Nikodymの定理より $\mathcal{G}$-可測な r.v. Z が $P|_\mathcal{G}$-a.s. で一意に存在し、

$$\nu(A) = \int_A Z \, dP|_\mathcal{G}(\omega) = \int_A Z \, dP(\omega) \qquad (\because P = P|_\mathcal{G} \text{ on } \mathcal{G},$$

Z は $\mathcal{G}$-可測，積分の定義$)$

を満たす。

このZをE[X|𝒢]と書けば定理が示される。
一般のXに対しては、$X = X^+ - X^-$ と $X^+ \geq 0$, $X^- \geq 0$ を用いて分解し、それぞれに対し同じ議論を適用すれば良い。 //

Thm (条件付き期待値の性質)

(1) (線形性)

$a, b \in \mathbb{R}$ に対し、

$$E[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\,E[X \mid \mathcal{G}] + b\,E[Y \mid \mathcal{G}] \quad (a.s.)$$

(測度0で除外される集合は a, b に依存)

(2) (単調性)

$X \geq 0$ (a.s.), X: 可積分 なら、

$$E[X \mid \mathcal{G}] \geq 0 \quad (a.s.)$$

特に、$X \geq Y$ (a.s.), X, Y: 可積分なら

$$E[X \mid \mathcal{G}] \geq E[Y \mid \mathcal{G}] \quad (a.s.)$$

である。

(3) (絶対値の不等式)

$$|E[X \mid \mathcal{G}]| \leq E[|X| \mid \mathcal{G}] \quad (a.s.)$$

(4) (単調収束定理)

$E[|X|] < \infty$ かつ、$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X$ で、
$\lim_{n\to\infty} X_n = X$ (a.s.) のとき、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n \mid \mathcal{G}] = E[X \mid \mathcal{G}] \quad (a.s.)$$

(これより、条件付き期待値のFatouの補題と優収束定理も成り立つ)

☆ (5) Yが𝒢-可測で XとYが可積分なら

$$E[XY \mid \mathcal{G}] = Y\,E[X \mid \mathcal{G}] \quad (a.s.)$$

特に $E[Y \mid \mathcal{G}] = Y$ (a.s.)

☆ (6) $\mathcal{G}'$ が $\mathcal{G}$ の部分σ-加法族なら

$$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}'] = E[X|\mathcal{G}'] \quad (a.s.)$$

(7) $\sigma(X)$: X の生成するσ-加法族 $(\sigma(X) = \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$

$\sigma(X)$ が $\mathcal{G}$ と独立なら

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X] \quad (a.s.)$$

//

(Proof)

(3)
$$\begin{aligned}|E[X|\mathcal{G}]| &= |E[X^+|\mathcal{G}] - E[X^-|\mathcal{G}]| \quad (X = X^+ - X^- \text{と分解}) \\ &\leqq |E[X^+|\mathcal{G}]| + |E[X^-|\mathcal{G}]| \\ &= E[X^+|\mathcal{G}] + E[X^-|\mathcal{G}] \\ &= E[X^+ + X^-|\mathcal{G}] = E[|X||\mathcal{G}]\end{aligned}$$

(4) 単調性より $(E[X_n|\mathcal{G}])_{n=1}^{\infty}$ も a.s. で単調非減少

$E[X_n|\mathcal{G}] \leqq E[X|\mathcal{G}]$ (a.s.) より、ある $\mathcal{G}$-可測な r.v. Z が存在して、

$$Z = \lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] \quad (a.s.)$$

とできる。(∵ 有界な単調列は収束する)

$\forall A \in \mathcal{G}$ に対して、

$$\begin{aligned}\int_A Z\,dP &= \int_A \lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}]\,dP \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A E[X_n|\mathcal{G}]\,dP \quad (\text{単調収束定理}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A X_n\,dP \quad (\text{条件付き期待値の定義}) \\ &= \int_A \lim_{n\to\infty} X_n\,dP \quad (\text{再び単調収束定理}) \\ &= \int_A X\,dP\end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n|\mathcal{G}] = Z = E[X|\mathcal{G}] \quad (a.s.)$$

(∵ 条件付き期待値の定義と一意性より) //

(5) ある $A \in \mathcal{G}$ を用いて $Y = \mathbb{1}_A$ と書けるなら
$^\forall B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_B E[XY|\mathcal{G}]\,dP &= \int_B XY\,dP \\ &= \int_{B\cap A} X\,dP \\ &= \int_{B\cap A} E[X|\mathcal{G}]\,dP \quad (\because B\cap A \in \mathcal{G}) \\ &= \int_B \underbrace{\mathbb{1}_A E[X|\mathcal{G}]}_{Y E[X|\mathcal{G}]}\,dP\end{aligned}$$

Y が $\mathcal{G}$-可測なので、$YE[X|\mathcal{G}]$ も $\mathcal{G}$-可測。よって条件付き期待値の一意性より $E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$ (a.s.) である。
一般の $Y \geqq 0$ については、ある単関数列 $Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ の単調収束極限とできることから、
単調収束定理から示せる。
$Y \geqq 0$ でないときは、$Y = Y^+ - Y^-$ と分解すれば良い。

(6) $^\forall A \in \mathcal{G}'$ に対し、$A \in \mathcal{G}$ でもあるので、

$$\begin{aligned}\int_A E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}']\,dP &= \int_A E[X|\mathcal{G}]\,dP \quad (\because A \in \mathcal{G}') \\ &= \int_A X\,dP \quad (\because A \in \mathcal{G}) \\ &= \int_A E[X|\mathcal{G}']\,dP\end{aligned}$$

(再び $A \in \mathcal{G}'$ と条件付き期待値の定義より)

よって、$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{G}'] = E[X|\mathcal{G}']$ (a.s.) ($\because$ 一意性)

//

Thm（Jensenの不等式）

$\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数とする。
X と $\phi(X)$ がともに可積分なら、

$$\phi(E[X|\mathcal{G}]) \leqq E[\phi(X)|\mathcal{G}] \quad (a.s)$$

（略証）

ϕ の $E[X|\mathcal{G}]$ における劣微分を $h \in \partial\phi(E[X|\mathcal{G}])$ としてとってくる
（h は $\mathcal{G}$-可測 なように）
${}^\forall x$ で $\phi(x) \geqq \phi(E[X|\mathcal{G}](\omega)) + \langle h(\omega), x - E[X|\mathcal{G}] \rangle$ である。
両辺 $E[\cdot|\mathcal{G}]$ をとれば示せる。
（本当は h の有界性が問題になるので、$X_n = X \mathbb{1}_{\{|X| \leqq n\}}$ として
X_n について示し、$n \to \infty$ とする。）

//

- 正則な条件付き確率

上の条件付き確率は各 $A \in \mathcal{F}$ ごとに $P(A|\mathcal{G})$ が a.s で
一意に決まった。
よって互いに排反な $(A_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ に対し（これは1つ固定する）

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|\mathcal{G})(\omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| \mathcal{G}\right)(\omega)$$

も a.s で成り立たせることができる。

（∵ 左辺で定義される r.v. が単調収束定理より、条件付き確率の条件を満たすため。

$${}^\forall B \in \mathcal{G}, \quad \int_B \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|\mathcal{G})\, dP = \sum_{i=1}^{\infty} \int_B P(A_i|\mathcal{G})\, dP$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$
$$= \int_B P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| \mathcal{G}\right) dP$$
）

しかし、$(A_i)_{i=1}^{\infty}$ の選び方として、非可算無限個の可能性がありえるので同時にこの等式を a.s で成り立たせられるかは自明ではない。
つまり、$P(\cdot|\mathcal{G})(\omega)$ が確率1で確率測度になるとは限らない。

しかし、Ωが完備可分距離空間かつ$\mathcal{F}$がそのBorel集合族なら次をみたす正則条件付き確率 $\mu : \Omega \times \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ が存在する。

(1) $^\forall A \in \mathcal{F}$に対し、$\omega \longmapsto \mu(\omega, A)$ が $P(A|\mathcal{G})$ と a.s. で一致

(2) a.s. の ω に対し、$A \longmapsto \mu(\omega, A)$ が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度

(証明は伊藤清「確率論」や Dudley「Real analysis and Probability」を参照)

XとYの同時分布が密度関数$f(x,y)$を持つとき、

$$P(Y \in A \mid \sigma(X))(\omega) = \frac{\int_A f(X(\omega), y)\, dy}{f(X(\omega))} \quad \left(f(x) = \int f(x,y)\,dy \right)$$

である。

つまり、条件付き分布の密度は $f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$ で与えられる。

[Radon-Nikodymの定理の証明]

νは有界かつ非負なので、

$$Q(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} \qquad (A \in \mathcal{F})$$

は確率測度になる。また、$Q \ll P$であることもすぐわかる。

ここで、

$$P^* = \frac{P+Q}{2}$$

とする。

$L^2(P^*)$をP^*による2乗可積分な関数のなすヒルベルト空間とする。

$$L^2(P^*) = \left\{ Y \,\middle|\, \int Y^2 dP^* < \infty \right\},$$

$$\langle Y, Y' \rangle = \int Y Y' \, dP^*.$$

そこで

$$L(Y) = \int Y \, dQ \qquad (Y \in L^2(P^*))$$

と線形汎関数を定義する。

これは$\underline{有界}$線形汎関数であることが以下のようにしてわかる。

$$|L(Y)| \leq \int |Y| \, dQ \leq \int |Y| \, dQ + \int |Y| \, dP$$

$$= 2 \int |Y| \, dP^* \underset{\uparrow \atop \text{Jensen}}{\leq} 2 \sqrt{\int |Y|^2 dP^*} = 2 \|Y\|_{L^2(P^*)}$$

よって、Lは有界線形なので、$\exists Z \in L^2(P^*)$で

$$L(Y) = \int Y Z \, dP^* = \langle Y, Z \rangle$$

と表すことができる。

$$\underset{\int Y \, dQ}{\underset{\parallel}{\int YZ \, dP^*}} = \frac{1}{2} \int YZ \, dP + \frac{1}{2} \int YZ \, dQ$$

より、$\displaystyle \int Y \left(1 - \frac{Z}{2}\right) dQ = \int \frac{YZ}{2} \, dP$ を得る。$({}^\forall Y \in L^2(P^*))$

$Y = \mathbb{1}_A$ とすると、

$$L(Y) = \int Y\, dQ = Q(A) = \int \mathbb{1}_A Z\, dP^* = \int_A Z\, dP^*$$

である。両辺 $P^*(A)^{-1}$ 倍することで、

$$0 \le \frac{Q(A)}{P^*(A)} \le \frac{\int_A Z\, dP^*}{P^*(A)} \le \frac{\int_A Z\, dP^*}{Q(A)/2} = 2$$

$\left(\because P^* = \frac{Q+P}{2}\right)$

であることがわかる。

$\forall A$ に対して、

$$0 \le \int_A Z\, dP^* \le 2 P^*(A) = \int_A 2\, dP^*$$

であることから、

$$0 \le Z \le 2 \quad (P^* \text{ a.s.})$$

である。

さらに、$Y = \mathbb{1}_{\{Z=2\}}$ とすると、

$$\int_{\{Z=2\}} \left(1 - \frac{Z}{2}\right) dQ = \int_{\{Z=2\}} \frac{Z}{2}\, dP$$

であるので $0 = P(Z=2)$ も得る。($\because$ 左辺$=0$, 右辺$=P(Z=2)$)

$Q \ll P$ でもあるので、$P^*(Z=2) = 0$ も得る。

つまり $0 \le Z < 2$ (P^*-a.s.) である。

今

$$Y = \left(\frac{Z}{2}\right)^n \mathbb{1}_A \quad (A \in \mathcal{F})$$

とすると、$Y \in L^2(P^*)$ であり、$0 \le Y < 1$ (P^* a.s.) である。

また、

$$\int_A \left(\frac{Z}{2}\right)^n \left(1 - \frac{Z}{2}\right) dQ = \int_A \left(\frac{Z}{2}\right)^n \frac{Z}{2}\, dP$$

より、両辺 $\sum_{n=0}^{N}$ することに

$$\int_A \left(1 - \frac{Z}{2}\right)^{N+1} dQ = \int_A \frac{Z}{2} \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{Z}{2}\right)^j dP$$

となる。 今 $N \to \infty$ で $\left(1-\frac{z}{2}\right)^{N+1} \nearrow 1$ $(P^{*}-a.s)$ なので

左辺 $\longrightarrow \int_A dQ = Q(A)$
右辺 $\longrightarrow \int_A \frac{z/2}{1-z/2} dP = \int_A \frac{z}{2-z} dP$

である。 あとは $X = \frac{z}{2-z}$ とすれば O.K.

//