

確率数理要論 7

① 確率過程

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間

S : 状態空間

\mathcal{B}_S を S の上に定義した σ -代数族 とする。

- $S = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_S = \mathcal{B}(\mathbb{R})$: 連続状態

- $S = \mathbb{Z}$ (整数), \mathcal{B}_S : \mathbb{Z} 集合: 離散状態
を主に考える。

T : 時間域

$T = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$: 連続時間

$T = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: 離散時間

Def

任意の $t \in T$ で

$X_t: \Omega \rightarrow S$ が可測 ($\forall c \in \mathcal{B}_S, X_t^{-1}(c) \in \mathcal{F}$)

の時、つまり X_t が S 値確率変数の時、

$X = (X_t)_{t \in T}$ を確率過程 (Stochastic Process) と言う。 //

Def

各 $\omega \in \Omega$ に対し、関数

$$X_\cdot(\omega): T \rightarrow S$$
$$\begin{matrix} \omega \\ t \mapsto X_t(\omega) \end{matrix}$$

が定まる。この $X_\cdot(\omega)$ を 標本関数 (sample path) と言う。 //

(標本過程, 標本路)

• $S = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}_+$ の時.

$C = C(T)$ を T 上の連続関数全体の集合

$D = D(T)$ を T 上の各上で右連続かつ左極限が存在する関数の集合.

(Right continuous with Left Limits, RCSS)

(continue à droite, limite à gauche, cadlag) と云う

と云う.

$X(\omega) \in C(T)$ ($\forall \omega \in \Omega$): C -過程

$X(\omega) \in D(T)$ ($\forall \omega \in \Omega$): D -過程

の場合を考慮することが多い.

例: ガウス過程 (C -過程), ポアソン過程 (D -過程)

• $T = \mathbb{Z}_+$ の時.

Ex. 1. (ランダムウォーク, random walk)

$(z_i)_{i=1}^{\infty}$ が独立な r.v.

$P(z_i = 1) = p$, $P(z_i = -1) = 1 - p$

$S = \mathbb{Z}$

$X_0 = 0$, $X_t = z_1 + \dots + z_t$ ($t \in \mathbb{N}$): ランダムウォーク

2. (自己回帰過程)

$(z_i)_{i=1}^{\infty}$: i.i.d. r.v., $z_i \sim N(0, 1)$

X_0 : $(z_i)_{i=1}^{\infty}$ と独立な r.v. (初期状態)

$X_t = aX_{t-1} + \sigma z_t$: 自己回帰過程, AR(1)過程
($a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$) (autoregressive process)

Def (Markov過程, Markov連鎖)

S : 状態空間

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$: S 値確率過程

- 離散時間

$\forall A \in \mathcal{B}_S,$

$$P(X_t \in A \mid X_0, \dots, X_{t-1}) = P(X_t \in A \mid X_{t-1}) \quad (a.s.)$$

↑

$P(X_t \in A \mid \sigma(X_0, \dots, X_{t-1}))$ の意味

ただし $\sigma(X_0, \dots, X_{t-1}) = \sigma(\bigcup_{i=0}^{t-1} \sigma(X_i))$:

X_0, \dots, X_{t-1} を可測にする最小の σ -代数

- 連続時間

$\forall A \in \mathcal{B}_S, \forall u > t,$

$$P(X_u \in A \mid X_s, 0 \leq s \leq t) = P(X_u \in A \mid X_t) \quad (a.s.)$$

をみたすとき、 $(X_t)_{t \in T}$ を Markov過程 とする。

- 昔の情報は影響しない。直前の情報にのみ依存する。

- $P(X_t \in A \mid X_{t-1} = x_{t-1}) = p(A, x_{t-1})$ のように“推移確率”が t に依存しない時、同次 Markov過程 とする。

Ex. (ランダムウォーク)

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + 1 & (\text{確率 } p) \\ X_t - 1 & (\text{確率 } 1-p) \end{cases}$$

→ 同次 Markov過程

Lem

離散時間 Markov 連鎖を考へる.

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ とする. $\forall E \in \mathcal{F}_S$ とする

$$P(X_{n+m} \in E | X_0, \dots, X_n) = P(X_{n+m} \in E | X_n) \quad (\text{a.s.}) //$$

(Proof) $m=1$ は定義そのもの.

ある $m \geq 2$ を成り立たせようとする.

$$P(X_{n+m+1} \in E | X_0, \dots, X_n)$$

$$= E [P(X_{n+m+1} \in E | X_0, \dots, X_{n+m}) | X_0, \dots, X_n]$$

(\because 条件付き期待値の性質 (b))

$$= E [P(X_{n+m+1} \in E | X_{n+m}) | X_0, \dots, X_n] \quad (*)$$

(\because Markov 過程の定義)

\therefore $P(X_{n+m+1} \in E | X_{n+m})$ は $\sigma(X_{n+m})$ -可測なので.

m に関する仮定より.

$$\text{右辺} = E [P(X_{n+m+1} \in E | X_{n+m}) | X_n]$$

\therefore $P(X_{n+m+1} \in E | X_{n+m})$ は $\sigma(X_n)$ -可測なので (*) の左辺もそうなり.

$$E [P(X_{n+m+1} \in E | X_0, \dots, X_n) \mathbb{1}_A] = E [\mathbb{1}_E(X_{n+m+1}) \mathbb{1}_A]$$

($\forall A \in \sigma(X_n)$)

\therefore であるので.

条件付き期待値の一貫性より

(\because 条件付き確率の定義より)

$$P(X_{n+m+1} \in E | X_0, \dots, X_n) = P(X_{n+m+1} \in E | X_n) \quad (\text{a.s.})$$

\therefore ある. \therefore $m+1$ の時も成立.

\therefore の Lem は連続時間 Markov 連鎖の定義を正当化する.

$$P(X_u \in E | X_s, s \leq t) = P(X_u \in E | X_t) \quad (\text{a.s.})$$

* 時間が連続の時は "次の時刻" が意味をなさないの \therefore .

このような定義には必要がある.

Def (加法過程)

$X_0 = 0$ かつ、任意の $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ に対し、
 $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ ($k=1, \dots, n$) は独立
かつ、 $X = (X_t)_t$ を 加法過程 とする。 //

Def (確率連続)

$T = \mathbb{R}_+$ とする。

$\forall s, t$ に対し、 $\lim_{t \rightarrow s} E[|X_t - X_s| \vee 1] = 0$ かつ、

$X = (X_t)_t$ は 確率連続 とあるとする。

($X_t \xrightarrow{P} X_s$ と同値) //

Def (Lévy過程)

$T = \mathbb{R}_+$ とする。

$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ は 確率連続な加法過程 かつ D -過程
かつ、Lévy過程 とする。 //

実は Lévy過程は後述の Poisson過程 と Gauss過程 の和で
表現することができる。

(Lévy-Ito分解)

④ Poisson 過程

空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ を考える.

μ を \mathbb{R}^d 上の σ -有限な非負測度とせよ. つまり

(1) $\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\mu(E) \geq 0$

(2) (σ -有限性)

$\exists E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (高々可算個) 且

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}^d$ かつ $\mu(E_n) < \infty$ ($\forall n$).

より $0 < \mu(E) < \infty$ なる $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$P_E(A) = \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)}$$

は確率測度になる.

Def (Poisson random measure)

r.v. の族 $X = (X(A))_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ が次をみたす時.

X を平均測度 μ (mean measure) の Poisson random measure と書く.

(1) a.s. $\omega \in \Omega$ に対し $X(A) = X(A, \omega)$ が A の関数として

σ -有限な非負測度になっている.

(2) 任意の $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し, $X(E)$ は平均 $\mu(E)$ の Poisson 分布に従う.

($\mu(E) = 0$ なら $X(E) = 0$ (a.s.), $\mu(E) = \infty$ なら $X(E) = \infty$ (a.s.) とせよ)

(3) 任意の互いに疎な $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ($E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$)) に対し,

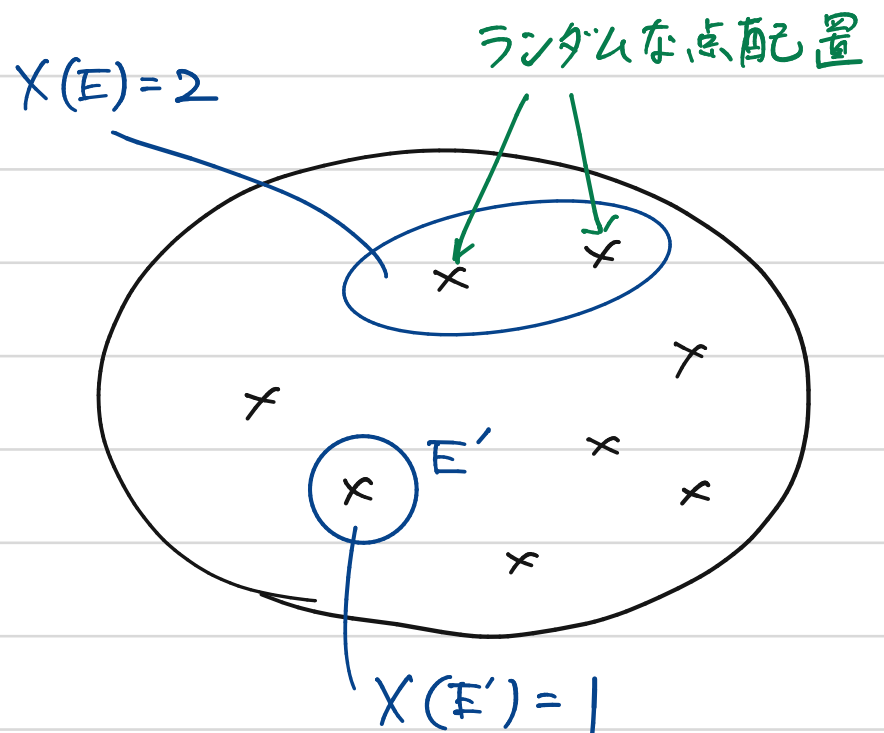
$X(E_i)$ ($i=1, \dots, n$) は独立.

\Leftarrow Completely random measure //

$\mu(A) = \int_A \lambda(x) dx$ と書けることを、 λ を Poisson random measure の強度関数 (intensity function) と書く.

Poisson r.m. は空間上でランダムに発生する事象の件数のモデリングに用いられる。

(ex. 交通事故の発生場所)



$X(E), X(E')$ は独立な Poisson 分布に従う。

また、積分を考えたことでジャンプを含む確率過程を柔軟に表現できる。

→ Levy 過程

- Poisson r.m. を実際に構成してみよう。

μ は σ -有限な測度

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_n S_n, \quad 0 < \mu(S_n) < \infty$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \quad S_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

と分割できる。

「ポアソン分布の和はポアソン分布」なので、各 S_n に制限した

$$X_n = \{X_n(A) = X(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), A \subseteq S_n\}$$

を考えた方が良さそう。

以後、ある S_n を固定して、 $X = X_n$ として話を進めよう。

Poisson random measure の構成

$$\left. \begin{array}{l} - Z \sim P_0(\mu(S_n)) \\ - Y_j \sim \nu_n \quad (j=1, \dots, Z) \quad (\text{i.i.d.}) \\ \text{ただし } \nu_n(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S_n)} \quad (A \subseteq S_n). \end{array} \right\}$$

としよう。

$$X(A) = \sum_{i=1}^Z \mathbb{1}_A(Y_i) = |\{Y_i \mid Y_i \in A\}|$$

とすれば、 Z は Poisson r.m. に従う。Zu.

まず、互いに異なる E_1, \dots, E_m に対し、
 Z 条件付けた

$$(X(E_1), \dots, X(E_m))$$

の分布は、

$$\left(\frac{\mu(E_1)}{\mu(S_n)}, \dots, \frac{\mu(E_m)}{\mu(S_n)} \right)$$

を (X) とする多項分布に従うことは確かである。

また、 $k = k_1 + \dots + k_m$ に対し、

$$\begin{aligned} & P(X(E_j) = k_j, j=1, \dots, m) \\ &= P(X(E_j) = k_j, j=1, \dots, m, X(S_n) = k) \\ &= P(Z = k, X(E_j) = k_j, j=1, \dots, m) \\ &= P(X(E_j) = k_j (j=1, \dots, m) | Z = k) P(Z = k) \\ &= \underbrace{\frac{k!}{k_1! \dots k_m!} \left(\frac{\mu(E_1)}{\mu(S_n)} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{\mu(E_m)}{\mu(S_n)} \right)^{k_m}}_{\text{多項分布}} \cdot \underbrace{e^{-\mu(S_n)} \frac{\mu(S_n)^k}{k!}}_{\text{Poisson}} \end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^m e^{-\mu(E_j)} \frac{(\mu(E_j))^{k_j}}{k_j!} \quad (\because \mu(S_n) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_m))$$

← 独立な Poisson の積

判別

1. 各 $X(E_j)$ の周辺分布は平均 $\mu(E_j)$ の Poisson 分布 ($Po(\mu(E_j))$).
2. $(X(E_j))_{j=1}^m$ は独立.

こいつ Poisson r.m. の定義に他ならない。

\mathbb{R}^d 全体で $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し、

$$X(A) = \sum_{n=1}^{\infty} X(A \cap S_n)$$

と定めれば定義をみたす。

実軸上の Poisson 過程

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の Poisson r.m. $Y = (Y(A))_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ を考え.

$X_t(\omega) = Y([0, t]) (\omega)$ と定める.

$(X_t)_{t \geq 0}$ を Poisson 過程 と呼ぶ. (逆に $(X_t)_{t \geq 0}$ から Y を復元できる
ことは Hopf の拡張定理からわかる)

簡単のため

$$\mu([a, b]) = \lambda(b-a) \quad (\text{一様強度}) \quad (\lambda > 0)$$

とする. このとき、 X を 強度 λ の Poisson 過程 と呼ぶ

Ex.

来客数, 株の取引回数, 生命保険の請求回数
(独立に到着する事象の件数をモデル化)

Thm

X を Poisson 過程とする

(1) $X_0 = 0$ (a.s.)

(2) X は独立増分

> 利, 任意の $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対し,

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \quad (\text{加法過程})$$

は独立.

(3) $\forall s < t$ に対し,

$X_t - X_s$ は平均 $\lambda(t-s)$ の Poisson 分布に従う:

$$P(X_t - X_s = k) = \frac{e^{-\lambda(t-s)} [\lambda(t-s)]^k}{k!} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

(4) a.s. の $\omega \in \Omega$ に対し, $t \mapsto X_t(\omega)$ は右連続かつ左極限が存在し, 単調非減少. (D-過程) //

こちらを Poisson 過程の定義とすることもできる.

また, Poisson 過程は Levy 過程でもあることもわかる. ($X_t \geq X_s$ (必ず) かつ $s < t$ かつ $X_t - X_s$ は Poisson 分布に従う)

Thm

X_t : 強度 λ のポアソン過程

$$\tau_i = \inf \{ t \geq 0 \mid X_t \geq i \} \quad (i \geq 1)$$

$$\Rightarrow \tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \dots$$

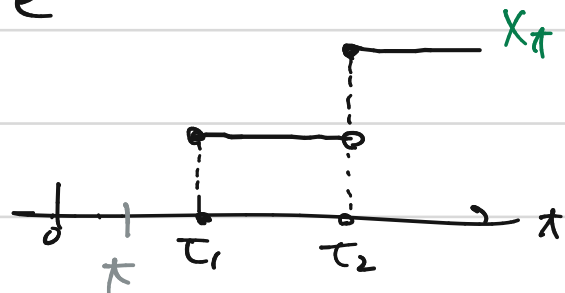
は独立に平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う。

(Proof)

時刻 t にはじめて最初のイベントが到着したとき。

$$P(\tau_1 > t) = P(X_t = 0) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

よって τ_1 は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う。



$t > s$ とする。

$$\begin{aligned} P(\tau_2 > t, \tau_1 \leq s) &= P(X_t - X_s = 0, X_s = 1) \\ &= \frac{e^{-\lambda s} \cdot \lambda s}{1!} \times e^{-\lambda(t-s)} = \lambda s e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

よって τ_2, τ_1 の同時分布の確率密度関数は

$$p(t, s) = -\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} P(\tau_2 > t, \tau_1 \leq s) = \lambda^2 e^{-\lambda t}$$

$$P(\tau_2 > t, \tau_1 \leq s) = \int_t^\infty \int_0^s p(u, v) du dv$$

となり、分布関数の微分によって L^1 から密度 p が存在)

よって $t \leftarrow s + u$ と変数変換すると、(つまり $(\tau_2, \tau_1) \mapsto (\tau_2 - \tau_1, \tau_1)$ と u の変換)

$(\tau_2 - \tau_1, \tau_1)$ の密度 $\tilde{p}(u, s)$ は

$$\tilde{p}(u, s) = p(s + u, s) = \lambda e^{-\lambda u} \cdot \lambda e^{-\lambda s}$$

$\lambda e^{-\lambda s}$ は τ_1 の密度 $\lambda e^{-\lambda s}$ の積と見られる。

$\tau_2 - \tau_1$ の density は $\lambda e^{-\lambda u}$ である。

同時密度が周辺密度の積で書けるので、 $\tau_2 - \tau_1$ と τ_1 は独立。

一般の n に対しては、帰納法で示す。 $t_1 < t_2 < \dots < t_n, \varepsilon > 0$ に対して。

$P(t_j < \tau_j \leq t_j + \varepsilon \quad (1 \leq j \leq n))$ を計算し全体を $1/\varepsilon^n$ 倍して $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば密度を計算できる。

Poisson 過程の一般化

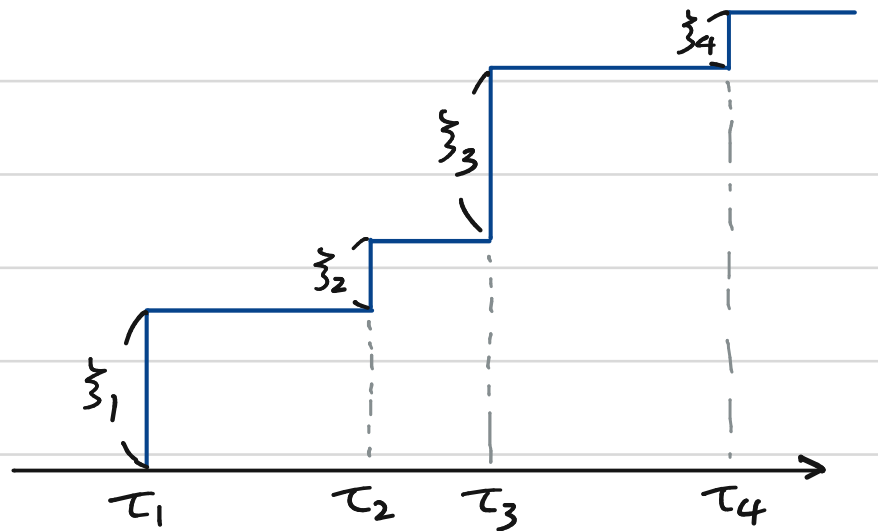
Compound Poisson process

τ_1, τ_2, \dots : Poisson 過程のジャンプ点

ξ_1, ξ_2, \dots : F 上の i.i.d.

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$$

(保険金請求金額の累計
→ 保険料の設定)



Pure-jump Levy 過程

N : $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上の Poisson random measure

μ : N の平均測度, $\forall t \geq 0$ におい

$$\begin{cases} - \mu(\{t\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) = 0, & (\leftarrow \text{ある時刻 } t \text{ でおこるジャンプは必ず} \\ & \text{確率 } 1 \text{ でおこる}) \\ - \int_{s \in [0, t]} \int_{|u| > 0} (u^2 \wedge 1) \mu(ds, du) < \infty & (\leftarrow X_t \text{ が有限 (} t \text{ についての条件)} \end{cases}$$

このとき,

$$X_t = \int_{s \in [0, t]} \int_{|u| > 0} u N(ds, du)$$

と表現される。 pure jump Levy 過程 と呼ばれる。 または Poisson 型 Levy 過程

$\mu([0, t] \times [-1, 1]) = \infty$ の時、 $\pm u$ ジャンプが $[0, t]$ の間で無限回

おこる。

例: $\mu(dt, d\xi) = dt \times \underbrace{\gamma \xi^{-1}}_{\text{ルバーク測度}} \exp(-\lambda \xi) \quad (\xi > 0)$

!! $g_{r, \lambda}(\xi)$ とおく。

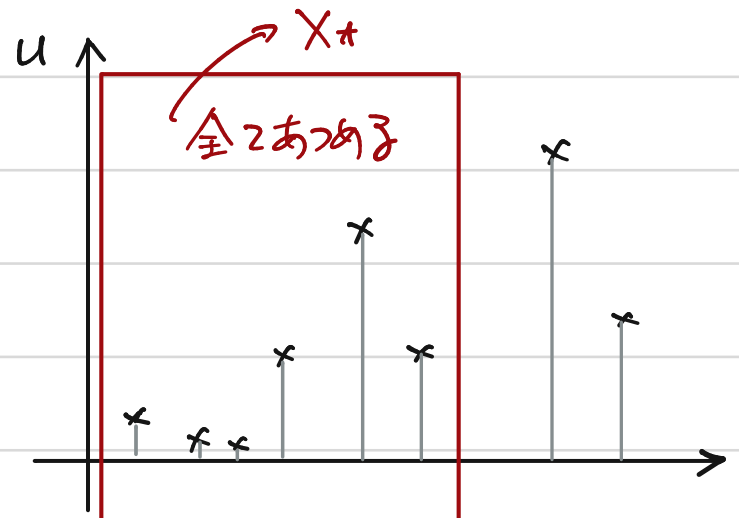
$$\hookrightarrow \int_0^1 g_{r, \lambda}(\xi) d\xi = \infty$$

$$\rightarrow N((a, b) \times (0, 1]) = \infty \text{ (a.s.)}$$

←

$X_t \sim$ 平均 $\frac{\gamma t}{\lambda}$, 分散 $\frac{\gamma t}{\lambda^2}$ のガンマ分布に従う。

⇒ Gamma 過程と言う。



→ Dirichlet 過程を定義する.

$$Y(A) = \frac{\int_{x' \in A} \int_{\xi \in [0, \infty)} \xi N(dx' d\xi)}{\int_{[0, \infty)} \xi N(S, d\xi)} \quad (A \subseteq S)$$

↑
全体

: Gamma 過程の比

(Dirichlet 分布の無限次元版)

自然言語処理, ニュラルネットワークの推定等に用いられる.

S上の分布のニューラルネットワーク推定に用いる.

(トピック分布の推定等)