確率数理要論9

・増大情報系

Def (増大情報系・filtration)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ において
$\mathcal{F}$の部分σ-加法族の族 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ が
$0 \leq {}^\forall s \leq {}^\forall t$ に対して、
$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$
をみたすとき、<u>増大情報系 (filtration)</u> と呼ぶ。 //

Ex.

B_t : ブラウン運動
$\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s \mid s \in [0,t]\})$ は filtration. //

σ-加法族 $\mathcal{F}_t$ は時刻 t までに起きた事象の"情報"を表す.

Def

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$: 増大情報系
$(X_t)_{t\geq 0}$: 確率過程

${}^\forall t \geq 0$ で X_t が $\mathcal{F}_t$-可測
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(X_t)_{t\geq 0}$ が <u>$\mathcal{F}_t$-適合</u> と言う.　（$(\mathcal{F}_t)_t$-適合とも書く）
($\mathcal{F}_t$-adaptive) //

未来の出来事には依存しない.

• 確率積分 （伊藤積分, stochastic integration）

Def

$\mathcal{L}^2([a,b])$ （$0 \le a < b$）

を以下をみたす確率過程 $f=(f_t)_{t\in[a,b]}$ の集合とする．

(1) 写像 $[a,b]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$(t,\omega) \longmapsto f_t(\omega)$

が $\mathcal{B}([a,b])\times\mathcal{F}$ -可測

↑直積σ-加法族

(2) f は $\mathcal{F}_t$-適合

(3) $E\left[\int_a^b f_t^2\,dt\right] < \infty$

↳ $\|f\|_{\mathcal{L}^2([a,b])} := \sqrt{E\left[\int_a^b f_t^2\,dt\right]}$ とする. //

確率積分 $\int_a^b f_t\,dB_t$ の定義

以後，ブラウン運動 $(B_t)_{t\ge 0}$ は $\mathcal{F}_t$-適合かつ $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立とする.

→ このとき，$(\mathcal{F}_t)_t$-ブラウン運動と呼ぶ.

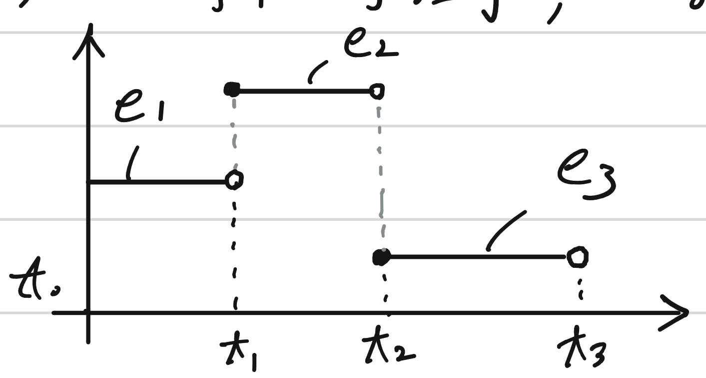
（例えば $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s \mid s\in[0,t]\})$ とすれば良い.）

まず，以下の状況を考える：

$$f_t(\omega) = \sum_{j=1}^{n} e_j(\omega)\,\mathbb{1}_{[t_{j-1},\,t_j)}(t)$$ （単過程, simple process）

$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ ： $[a,b]$の分割（固定分点）

$e_j(\omega)$: $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-可測, $e_j \in L^2$ （i.e. $E[e_j^2] < \infty$）



このとき，

$$\underline{\int_a^b f_t\, dB_t := \sum_{j=1}^{n} e_j(\omega)\left(B_{t_j}(\omega) - B_{t_{j-1}}(\omega)\right)} \quad \text{[伊藤積分]}$$

と定める．

c.f. 部分積分：$f_t(\omega) = e(\omega)$ のとき

$$\int_a^b f_t \frac{dB_t}{dt} dt = [f_t B_t]_a^b - \int_a^b \underbrace{f'_t}_{=0} B_t\, dt$$

$$= e(\omega)\cdot(B_b - B_a)$$

でも，B_t は微分不可能なので，これはあくまでアナロジー

単過程から一般の f_t に拡張したい $\longrightarrow$ 極限を取る．
(L^2 内で)

Thm（等長性，Ito-isometry）

$f = (f_t)_{t\geq 0}$：単過程

$$\Longrightarrow E\left[\int_a^b f_t^2\, dt\right] = E\left[\left(\int_a^b f_t\, dB_t\right)^2\right]$$

つまり，$f \longmapsto \int_a^b f_t\, dB_t$ は $L^2([a,b])$ から $L^2(\Omega)$ への等長写像

（$\int_a^b f_t dB_t$ は確率変数）

//

(Proof) $E[B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}] = 0,\ E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}] = t_j - t_{j-1}$

（$\because$ $B_t - B_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立であったことを思い出す）

なので

$$\text{右辺} = E\Big[\sum_{j=1}^{n} e_j^2(\omega)\left(B_{t_j}(\omega) - B_{t_{j-1}}(\omega)\right)^2 + 2\sum_{i<j} e_i e_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\Big]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} E\Big[e_j^2\, \underbrace{E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]}_{= t_j - t_{j-1}}\Big] \quad \longleftarrow e_j \text{ は } \mathcal{F}_{t_{j-1}}\text{-可測}$$

$$+ 2\sum_{i<j} E\Big[e_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\, e_j\, \underbrace{E[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{j-1}]}_{=0}\Big]$$

$\uparrow$ $e_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$，$e_j$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-可測

$$= \sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})E[e_j^2] = E\left[\int_a^b f_t^2\, dt\right]$$

//

Thm（稠密性）

${}^\forall f \in \mathcal{L}^2([a,b])$ に対し，$\exists f^{(m)}$ $(m=1,2,\cdots)$：単過程の列 で．

$\longleftarrow \|f-f^{(m)}\|^2_{\mathcal{L}^2([a,b])}$

$$\lim_{m\to\infty} E\left[\int_a^b (f_t - f_t^{(m)})^2 dt\right] = 0$$

//

つまり，単過程は $\mathcal{L}^2([a,b])$ 内で稠密．

(Proof)

f_t が a.s. で t について連続かつ一様有界（${}^\forall t,\omega$ で $|f_t(\omega)| \leq M$）な場合で示す．

$f_t^{(m)}(\omega) = \sum_{j=1}^{m} f_{t_{j-1}}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j)}(t)$

と $[a,b]$ の m 等分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ に対して定義すれば，

優収束定理より

$$E\left[\int_a^b (f_t - f_t^{(m)})^2 dt\right] \longrightarrow 0$$

が言える．

連続でなければ，f_t をまず

$$f_t^{(\varepsilon)}(\omega) = \varepsilon^{-1}\int_{t-\varepsilon}^{t} f_s(\omega) ds$$

で近似し，f_t が有界でなければ，$M>0$ に対して

$$f_t^{(M)} := (f_t \vee (-M)) \wedge M$$

で近似すれば良い．

//

$f \in \mathcal{L}^2([a,b])$ に対し，単過程 $f^{(m)}$ を用いて，$f^{(m)} \longrightarrow f$ in $\mathcal{L}^2([a,b])$ とできて，等長性より $\left(\int_a^b f_t^{(m)} dB_t\right)_{m=1}^{\infty}$ も $L^2(\Omega)=L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ 内のコーシー列になっている．

$L^2(\Omega)$ は完備なので，$L^2(\Omega)$ 内にコーシー列の収束先が存在する．

これを $\int_a^b f_t dB_t$ と定める．

$$\int_a^b f_t dB_t := \lim_{m\to\infty}\int_a^b f_t^{(m)} dB_t \qquad (\text{2次平均収束})$$

定義から $\int_a^b f_t dB_t$ は $\mathcal{F}_b$-可測かつ L^2

しかも、これは $f^{(m)}$ の取り方によらない。

なぜなら、

$$\| f^{(m)} - f \|_{\mathcal{L}^2([a,b])} \longrightarrow 0, \quad \| g^{(m)} - f \|_{\mathcal{L}^2([a,b])} \longrightarrow 0$$

$E\left[\int_a^b (f_t^{(m)} - f_t)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$ の意味

なら、

$$\begin{aligned} \| f^{(m)} - g^{(m)} \|_{\mathcal{L}^2([a,b])} &= \| f^{(m)} - f + f - g^{(m)} \|_{\mathcal{L}^2([a,b])} \\ &\leq \| f^{(m)} - f \|_{\mathcal{L}^2([a,b])} + \| g^{(m)} - f \|_{\mathcal{L}^2([a,b])} \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

であるが、一方で

$$\| f^{(m)} - g^{(m)} \|_{\mathcal{L}^2([a,b])} = E\left[\left(\int_a^b f_t^{(m)} dB_t - \int_a^b g_t^{(m)} dB_t \right)^2 \right] \quad (\because \text{等長性})$$

より、右辺も0に収束し、$\int_a^b f_t^{(m)} dB_t$ と $\int_a^b g_t^{(m)} dB_t$ は $L^2(\Omega)$ 内で同じ元に収束する。

Thm (等長性) 先ほどは単過程だった

$f \in \mathcal{L}^2([a,b])$ に対し、

$$E\left[\int_a^b f_t^2 dt \right] = E\left[\left(\int_a^b f_t dB_t \right)^2 \right]$$

//

Proof $\int_a^b f_t dB_t$ の構成からほぼ自明であるが、一応示しておく。

$(f_t^{(m)})_t \longrightarrow (f_t)_t$ in $\mathcal{L}^2([a,b])$ より、

$$E\left[\int_a^b f_t^{(m)2} dt \right] = \| f^{(m)} \|^2_{\mathcal{L}^2([a,b])} \longrightarrow \| f \|^2_{\mathcal{L}^2([a,b])}.$$

さらに、等長性より、

$$\| f^{(m)} \|^2_{\mathcal{L}^2([a,b])} = E\left[\left(\int_a^b f_t^{(m)} dB_t \right)^2 \right] \quad (\because \text{等長性})$$

$\downarrow$ $\quad\quad$ $\downarrow$ $(\because \int_a^b f_t dB_t$ の定義、$L^2(\Omega)$ での収束$)$

$$\| f \|^2_{\mathcal{L}^2([a,b])} \quad\quad E\left[\left(\int_a^b f_t dB_t \right)^2 \right]$$

よって、この2つは等しくなる。

Lem

$f, g \in \mathcal{L}^2([a,b])$ に対し、

(1) $E\left[\int_a^b f_t\, dB_t\right] = 0$

(2) $\int_a^b (\alpha f_t + \beta g_t)\, dB_t = \alpha \int_a^b f_t\, dB_t + \beta \int_a^b g_t\, dB_t$ (a.s.)

証明は省略. いずれも単過程に対して成り立つことから示せる.

Remark

伊藤積分はより広いクラスの被積分関数にも定義できる.

すなわち, f_t が $\mathcal{F}_t$-適合かつ $\int_a^b f_t^2\, dt < \infty$ (a.s.)

($E\left[\int_a^b f_t^2\, dt\right] < \infty$ ではない)

→ L^2-内で確率収束する列を作り、その収束先として定義.

Def

確率過程 $X = (X_t)_t$, $Y = (Y_t)_t$ に対し,

Y が X の modification または version であるとは,

$^\forall t$ で $P(X_t = Y_t) = 1$

となる時を言う.

特に Y が連続なパスを持つ時, Y を連続な修正と言う.
(continuous modification)

Remark

不定積分 $X_t = \int_0^t f_s\, dB_s$ を考えると, X_t は L^2-収束の意味で定義されているので, a.s. には一意に定まるが,

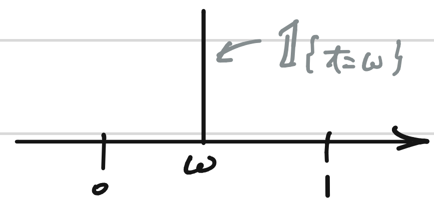
零集合が t に依存するので, $(X_t)_{t \geq 0}$ が連続なパスを持つとは限らない.

例えば, $\Omega = [0,1]$, P: 一様分布 (Lebesgue 測度), $f = 0$

とすると, $\int_0^t 0\, dB_s = 0$ となるが, 任意の $t \in [0,T]$ に対し,

L^2 の元として $0 = \mathbb{1}_{\{t=\omega\}}$ なので, ($\because \mathbb{1}_{\{t=\omega\}} = 0$ (a.s.))

$\int_0^t 0\, dB_s = \mathbb{1}\{t=\omega\}$ とできる.



しかし、全ての $\omega \in \Omega$ に対して、

$t \mapsto \mathbb{1}\{t=\omega\}$ は連続ではない.

一方、上述のように、$\mathbb{1}\{t=\omega\} = 0$ (a.s.) ($\forall t \in [0,1]$) より、連続な修正を持つ.

しかし、確率積分 $(X_t)_{t\in[0,T]}$ は連続な修正を持つことが知られている.

これは単過程をうまく取ることにより $X_t^{(n)} = \int_0^t f_s^{(n)} dB_s$ が X_t に a.s. で一様収束するようにできて (後述の Doobの不等式より).
さらに Brown運動の連続性より $t \mapsto X_t^{(n)}$ は a.s. で連続であることから、X_t も t について連続な修正が存在することが従う.

以下、確率積分は(零集合におけるふるまいを調整して)連続なパスを持つとする.

Ex. $X_t = \int_0^t B_s dB_s$ (伊藤の公式を使えば楽だが、ここでは直接導出する)

$n=1,2,\cdots$ に対して、$t_j = \frac{jt}{n}$ $(j=0,1,2,\cdots,n)$ とおく.

$$f_s^{(n)}(\omega) = \sum_{j=1}^{n} B_{t_{j-1}} \mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j)}(s)$$

とする. このとき、

$$\begin{aligned}
\int_0^t f_s^{(n)} dB_s &= \sum_{j=1}^{n} B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2}(B_{t_{j-1}} - B_{t_j}) + \frac{1}{2}(B_{t_{j-1}} + B_{t_j}) \right\} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (B_{t_{j-1}}^2 - B_{t_j}^2)}_{= B_t^2}
\end{aligned}$$

一方で、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\sqrt{n}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})}_{\sim N(0,t)} \Big)^2 \longrightarrow t$ in L^2

(∵ 大数の法則)

よって $X_t = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$

← 通常の積分との違い!

普通の積分の感覚で計算したら？

例に $X_t = \frac{1}{2}B_t^2$ とする．

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}X_t = B_t \cdot \frac{dB_t}{dt}$$ ← 普通なら（可微分なら）

$$\Rightarrow \quad X_t = \int_0^t \frac{dX_s}{ds}ds = \int_0^t B_s \frac{dB_s}{ds}ds$$
$$= \int_0^t B_s\, dB_s$$

となるので．

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2$$

となるが．これは例の"正しい"計算とズレている．

すなわち．安易に $\frac{d}{dt}(B_t^2) = 2B_t\frac{dB_t}{dt}$ のような計算をしてはいけない．

⟶ 後述の伊藤の公式．

• マルチンゲール (Martingale)

確率過程の解析ではmartingale理論が役に立つ.
まずは離散時間で考える.

Def (Martingale)

$X=(X_n)_{n=0}^{\infty}$: 確率過程
$\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$: 増大情報系
Xが以下をみたすとき($\mathbb{F}$-)マルチンゲールと言う.

(1) $^\forall n$ で $X_n \in L^1$ $\quad$ (i.e., $E[|X_n|]<\infty$)
(2) $(X_n)_n$ は $\mathcal{F}_n$-適合
(3) $E[X_n|\mathcal{F}_m]=X_m$ (a.s.) $\quad$ ($^\forall n \geqq m$)

Ex.

$(Z_n)_{n=1}^{\infty}$: i.i.d. r.v., $Z_1 \in L^1$, $E[Z_1]=0$

$\Rightarrow$ $X_0=0$,
$X_n=\sum_{i=1}^{n} Z_i$
とすると, $(X_n)_n$ はマルチンゲール
$(\mathcal{F}_0:=\{\phi,\Omega\},\ \mathcal{F}_n:=\sigma(Z_1,\dots,Z_n))$

(∵)

$^\forall n$, $X_n \in L^1$ は明らか. $\mathcal{F}_n$-適合性も明らか.
任意の $n>m$ に対して

$$E[X_n|\mathcal{F}_m]=X_m+E[Z_{m+1}+\cdots+Z_n|\mathcal{F}_m]=X_m \quad (a.s.)$$

(∵ X_m は $\mathcal{F}_m$-可測なので $E[X_m|\mathcal{F}_m]=X_m$ (a.s.))

//

S: 可算集合, $(X_n)_{n=1}^{\infty}$: S値 r.v.s

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\dots,X_n)$　　つまり $\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(\{a_i\})$

なら $\mathcal{F}_n$ の元は $\{X_1=a_1,\dots,X_n=a_n\}$ の形の集合の和集合で書ける.

→ $\mathcal{F}_n$ は時刻 n までに得られる情報を表している.

X_n はギャンブルにおける時刻nの資産であるとして考えてみよう.

マルチンゲールの Def の (3) は時刻mまでの情報下での X_n の条件付期待値が X_m に等しい. つまり、どの時点でみても将来の利益の条件付期待値が0であることを意味している.

→ マルチンゲールは「公平な賭け」とも言われる.

Def

マルチンゲールの定義で(3)の代わりに

(3') $E[X_n \mid \mathcal{F}_m] \geq X_m$ (a.s.) ($\forall n \geq m$) ⇒ X は劣マルチンゲール
sub-martingale

(3'') $E[X_n \mid \mathcal{F}_m] \leq X_n$ (a.s.) ($\forall n \geq m$) ⇒ X は優マルチンゲール
super-martingale

Def (停止時刻, stopping time)

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$: 増大情報系

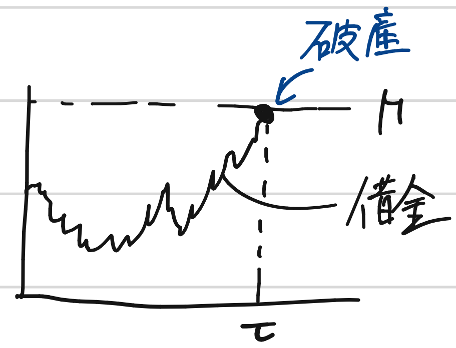
確率変数 $\tau : \Omega \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ が

$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$

をみたすとき、τを停止時刻と言う.

時刻nまでの情報で $\tau=n$かどうかがわかる.
未来の情報には依存しない.

Ex. Markov連鎖における初到達時刻
(ギャンブルで破産する時刻とか)



Thm (任意抽出定理, Optional stopping theorem)

$X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$: 劣マルチンゲール

τ : 停止時刻 で、$\exists n \in \mathbb{N}$ で $\tau \leqq n$ (a.s.)

$\Longrightarrow$

$$E[X_0] \leqq E[X_\tau] \leqq E[X_n]$$ ← ただし、$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$

特に X が マルチンゲールなら $E[X_\tau] = E[X_0]$ //

※ つまり、マルチンゲールはいつ賭けをやめる戦略をとっても利益の期待値は0.

(Proof)

$$E[X_\tau] = E[X_\tau \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}\{\tau = i\}] = \sum_{i=0}^{n} E[X_i \mathbb{1}\{\tau = i\}].$$

ここで、$\{\tau = i\} \in \mathcal{F}_i$ かつ $E[X_n | \mathcal{F}_i] \geqq X_i$ (a.s.) なので、

条件付き期待値の性質より

$$\text{右辺} \leqq \sum_{i=0}^{n} E[E[X_n | \mathcal{F}_i] \mathbb{1}\{\tau = i\}]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} E[X_n \mathbb{1}\{\tau = i\}] \quad (\because \mathbb{1}\{\tau = i\} \text{ は } \mathcal{F}_i\text{-可測なので})$$

$$= E[X_n \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}\{\tau = i\}}_{= 1 \ (\because 0 \leqq \tau \leqq n)}] = E[X_n]$$

これで、$E[X_\tau] \leqq E[X_n]$ は示せた。

また、$\{\tau \geqq k\} = \{\tau \leqq k-1\}^c = \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \{\tau = i\}\right)^c \in \mathcal{F}_{k-1}$ より、

$$E[X_0] = E[X_0 \mathbb{1}\{\tau = 0\}] + E[X_0 \mathbb{1}\{\tau \geqq 1\}]$$

$$\leqq E[X_\tau \mathbb{1}\{\tau = 0\}] + E[E[X_1 | \mathcal{F}_0] \underbrace{\mathbb{1}\{\tau \geqq 1\}}_{\mathcal{F}_0\text{-可測}}]$$

$$= E[X_\tau \mathbb{1}\{\tau = 0\}] + E[X_1 \mathbb{1}\{\tau \geqq 1\}]$$

$$\vdots$$

$$= E[X_\tau \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}\{\tau = i\}] = E[X_\tau].$$

特に X がマルチンゲール なら $(-X_n)_{n=0}^{\infty}$ も 劣マルチンゲールなので、

$E[-X_0] \leqq E[-X_\tau] \leqq E[-X_n]$ でもある。よって $E[X_\tau] = E[X_n]$ //