演習解答 2

(1) ($\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$)

(a) (⊂) $A_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $(\forall i)$ より、$X^{-1}(A_i) \subset X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ である。
よって $\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A_i) \subset X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ である。

(b) (⊃) 一方で、$\forall x \in X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ に対し、$X(x) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ より、
ある k が存在して、$X(x) \in A_k$ である。つまり $x \in X^{-1}(A_k)$。
よって、$X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)$

(a), (b) より = が成り立つ

($X^{-1}(A)^c = X^{-1}(A^c)$)

$x \in X^{-1}(A)^c \iff X(x) \notin A \iff X(x) \in A^c \iff x \in X^{-1}(A^c)$

(2) (i) $\Omega = X^{-1}(\Omega')$ より、$\Omega \in X^{-1}(\mathcal{F}')$ である

(ii) $A \in X^{-1}(\mathcal{F}') \Rightarrow \exists B \in \mathcal{F}'$ s.t. $A = X^{-1}(B) \xRightarrow{(1)より} \exists B \in \mathcal{F}'$ s.t. $A^c = X^{-1}(B^c)$
$\Rightarrow \exists B' \in \mathcal{F}'$ s.t. $A^c = X^{-1}(B') \Rightarrow A^c \in X^{-1}(\mathcal{F}')$

(iii) σ-加法性も同様に (1) を用いて示せる。

(3)
- (2)より、$X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$ は σ-加法族。また、$X^{-1}(\mathcal{A}') \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$ である。
  よって、$\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \subset X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$ である。
- ノート2の p.3 と同様に示す。 $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{A}')$ と書く。

$$\mathcal{F}_0 := \{ A \in \mathcal{F}' \mid X^{-1}(A) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \}$$

とする。定義より、$\mathcal{A}' \subset \mathcal{F}_0$ かつ、$X^{-1}(\mathcal{F}_0) \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ である。
$\mathcal{F}_0$ が σ-加法族であることを示す。それが示せれば、$\sigma(\mathcal{A}') \subset \mathcal{F}_0$ なので、
$X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}')) \subset X^{-1}(\mathcal{F}_0) \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ が示せる。σ-加法族であることは以下で示せる。

(i) $X^{-1}(\Omega') = \Omega \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ より、$\Omega' \in \mathcal{F}'$ である。

(ii) $A \in \mathcal{F}_0$ なら、$X^{-1}(A) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \Rightarrow X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$
$\Rightarrow A^c \in \mathcal{F}_0$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_0$ なら、$X^{-1}(A_n) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))\ (\forall n) \Rightarrow X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) \in \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$
$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_0$

この2つを合わせて $\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$ を得る。

(4) (3) より $X^{-1}(\mathcal{F}') = X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}')) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}'))$ である.

よって.

X が $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-可測 $\Longleftrightarrow X^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$

$\Longleftrightarrow X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}')) \subset \mathcal{F}$

$\Longleftrightarrow \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \subset \mathcal{F}$

$\Longleftrightarrow X^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{F}$

($\because$) ($\Longrightarrow$) $X^{-1}(\mathcal{A}') \subset \sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \subset \mathcal{F}$

($\Longleftarrow$) $\mathcal{F}$ は σ-加法族なので.
$X^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{F}$ なら. $X^{-1}(\mathcal{A}')$ を含む最小の σ-加法族は $\mathcal{F}$ に含まれる. つまり $\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) \subset \mathcal{F}$.

(5) $\mathcal{A}' = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ とすると. $\sigma(\mathcal{A}') = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ より.

(4) を用いると. $X^{-1}(\mathcal{A}') \subset \mathcal{F} \Longleftrightarrow X$ は $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測

(6) ・連続関数 g に対し. $g \circ X$ は可測である. 特に. $g(x) = |x|$ とれば.
$|X|$ の可測性を得る.

- 反例: $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ とする. A を Borel 非可測集合とする.
$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) - \mathbb{1}_{A^c}(\omega)$ とすると. X は非可測 (r.v. ではない).
しかし. $|X(\omega)| = 1$ $(\forall \omega \in \Omega)$ より. $|X|$ は可測.

(7) $g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ を $g(x_1, \dots, x_m) = x_1 + \cdots + x_m$ とすると. g は連続で特に.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測. m 個の r.v. $X_1, \dots, X_m$ に対し. $X = (X_1, \dots, X_m)$ とすると.
X は $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$-可測である. ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ は $(-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_m]$ で生成されるので)
よって. $g \circ X(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_m(\omega)$ は可測.
今. $X_i = a_i \mathbb{1}_{A_i}$ は. $x \geq a_i$ なら $X^{-1}((-\infty, x]) = A_i \in \mathcal{F}$
$x < a_i$ なら $X^{-1}((-\infty, x]) = \phi \in \mathcal{F}$
である.

($\sum a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum a'_j \mathbb{1}_{A'_j}$ と disjoint な (A'_j) を用いて書けることを用いれば より直接的に示せる.)

(8) 省略

(9) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ $(\lambda > 0)$ より. $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

(10) $x^* := \inf_{x\in\mathbb{R}} \{x \mid F(x) \geq y\}$ とすると. $x > x^*$ なら. $x \in A(y)$ で.
$x < x^*$ なら $x \notin A(y)$ である.

$x^* \in A(y)$ なら. $A(y) = [x^*, \infty)$ で閉集合であることが示せる.
定義より ある$(x_k)_k \subset A(y)$ が存在して. $x_k \downarrow x^*$ である.
$F(x)$は右連続なので. $\lim_{k\to\infty} F(x_k) = F(x^*)$ である.

しかし. $F(x_k) \geqq y$ $(^\forall k)$ より. $F(x^*) \geqq y$ でもある. つまり$x^* \in A(y)$.

(11) Yがr.v.であることは連続関数と可測関数の合成が可測であること
による.
$y \in (0,1)$で考える.

(10)より.
$$
\begin{aligned}
P(Y \geqq y) &= P(F(X(\omega)) \geqq y) \\
&= P(X(\omega) \in A(y)) \quad \leftarrow A(y)\text{は閉} \\
&= P(X \geqq F^{-1}(y)) \quad \leftarrow F^{-1}(y) = \inf\{x \mid x \in A(y)\} \\
&= 1 - F(F^{-1}(y)) + P(X = F^{-1}(y))
\end{aligned}
$$
ここで. $F(F^{-1}(y)) = y$である. なぜなら(10)より $F(F^{-1}(y)) \geqq y$ であるが. $F(F^{-1}(y)) > y$
とすると, $^\forall \varepsilon > 0$に対し. $F(F^{-1}(y) - \varepsilon) < y$になるが. 中間値の定理より. ($F$が連続なので)
$F^{-1}(y) - \varepsilon < {}^\exists x < F^{-1}(y)$ で. $F(x) = y$ とできる. これは $F^{-1}(y)$の定義と矛盾する.
つまり. $F(F^{-1}(y)) = y$ である. さらに. Fは連続なので. $P(X = F^{-1}(y)) = 0$.
よって. $P(Y \geqq y) = 1 - y$ で $P(Y < y) = y$ でもある.
一方. $P(Y = y) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{y \leqq Y < y + \frac{1}{n}\}) = \lim_{n\to\infty} P(Y \in [y, y+\frac{1}{n}))$
$= \lim_{n\to\infty} (y + \frac{1}{n} - y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
よって. $P(Y \leqq y) = P(Y < y) + P(Y = y) = y$ である.
$y = 0, 1$ においては $\lim_{y\to 0} P(Y \leqq y) = 0$, $\lim_{y\to 1} P(Y \leqq y) = 1$ より O.K. //

(12) (i) $\xi_F((a,b]) = \{x \in (0,1] \mid F^{-1}(x) \in (a,b]\}$
$= \{x \in (0,1] \mid a < F^{-1}(x) \leqq b\}$
$= \{x \in (0,1] \mid F(a) < x \leqq F(b)\} = (F(a), F(b)] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(ii) $\xi_F(\mathbb{R}) = (0,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(iii) $\xi_F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ なら. $\xi_F(A^c) = (\xi_F(A))^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(iv) (2)の証明と同様

(v) (i)〜(iv)より. $\mathcal{A}$はσ-加法族で任意の区間$(a,b]$を含む. よって.
$\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である.

(13) (12)より $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、$\xi_F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ より $\mu(\xi_F(A))$ は well-defined.

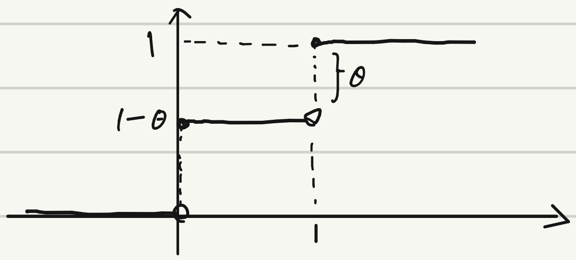
また、P_F が確率測度になることも確かめられる。実際、ξ_F の定義より

$P_F = F^{-1}\#\mu$ (μ の push-forward) である。

$$P_F((-\infty,x]) = \lambda(\xi_F(-\infty,x]) = \lambda(\{u\in(0,1] \mid F^{-1}(u)\le x\})$$
$$= \lambda(\{u\in(0,1] \mid u\le F(x)\})$$
$$= \lambda((0,F(x)]) = F(x)$$

//

(14)



($\theta = F(X=1)$, $1-\theta = F(X=0)$ としている)

(15)

$$F(x-) = \lim_{y\nearrow x} F(y) = \lim_{y\nearrow x} P(X\le y) = \lim_{n\to\infty} P\left(X\le x-\frac{1}{n}\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{n\to\infty}\left\{X\le x-\frac{1}{n}\right\}\right)$$
$$= P(X<x)$$

(16) $A_n = \{x\in\mathbb{R} \mid F(x)-F(x-)\ge \frac{1}{n}\}$ とする。

不連続点の集合は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ であるが、

$$1 \ge P(A_n) \ge \sum_{x\in A_n} P(X=x) = \sum_{x\in A_n}(F(x)-F(x-)) \ge |A_n|\cdot\frac{1}{n}$$

であるので、$|A_n|\le n$ である。(A_n が非可算なら、高々可算個の部分集合を取ってくれば $|A_n|>n$ ではないことが分かる)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は有限集合の可算和なので、高々可算である。

//