演習問題解答6

(1) ほぼ自明なので略

(2) $A_a := \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leqq a\}$ とする.

$(x_n)_n \subset A_a$ は、$\mathbb{R}^d$ 内で x へ収束する列だとする.

$x \in A_a$ なら A_a は閉.

下半連続性の定義より $\liminf_{n \to \infty} f(x_n) \geqq f(x)$ が得られ、

$f(x_n) \leqq a$ $(^\forall n)$ より $f(x) \leqq a$ を得る よって $x \in A_a$ で、A_aは閉である.

よって $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ であるので (閉集合は$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$に含まれる)

f は可測.

fが可測なら$-f$も可測なので、上半連続な関数に対しても同様に示せる.

(3) 任意の可測関数は単関数の各点収束先として書けることは講義ノートで示した. よって 可測関数の集合 $\subset$ (命題の関数クラス)

逆の包含関係を示す.

まず、任意の単関数は可測関数である. よって可測関数の集合が各点収束に関して閉じていることを示せば良い.

演習問題3の(7)において $^\forall \omega \in \Omega$ で $X_n(\omega) \to {}^\exists X(\omega)$ なら

X は r.v. になることを示した. つまり、可測関数の各点収束先も可測.

すなわち、可測関数の集合は各点収束について閉じている.

(4) 十分条件であることはすぐわかる. 必要条件であることを示す.

Yは$\sigma(X)$-可測であるとする. このとき、Yは$\sigma(X)$-可測な単関数の各点収束先として書ける. すなわち、$Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ $(A_i \in \sigma(X)$,

$(A_i)_{i=1}^{k_n}$ は互いに排反) なる単関数を用いて、$Y(\omega) = \lim_{n \to \infty} Y_n(\omega)$ $(^\forall \omega \in \Omega)$ と書ける.

今 各 Y_n の単関数表示を $Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ とすると. $A_i \in \sigma(X)$ より
$\exists B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ で. $A_i = X^{-1}(B_i)$ であるので. $\mathbb{1}_{A_i} = \mathbb{1}_{B_i} \circ X$ と書ける.

$\left(\because \ \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega \notin A_i) \\ 1 & (\omega \in A_i) \end{cases} \right.$ であるが. $\omega \in A_i \Leftrightarrow X(\omega) \in B_i$ であるため$\Big)$

よって. $f_n(x) = \sum_{i=1}^{k_n} a_i \mathbb{1}_{B_i}$ とおけば. f_n は $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測」.
しかも. $Y_n = f_n \circ X$ である. 今. $\forall \omega \in \Omega$ で $Y(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega)$
$= \lim_{n\to\infty} f_n \circ X(\omega)$ であることより. $\forall x \in X(\Omega)$ において.
$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在し. これは任意の $\omega \in X^{-1}(\{x\})$ を用いて
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = Y(\omega)$ で与えられる. この収束先を $f(x)$ $(x \in X(\Omega))$
とおく. 今 f を全域 $\mathbb{R}$ 上に拡張する. G を $f_n(x)$ が収束する x の
全体とする. そして.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \notin G) \\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) & (x \in G) \end{cases}$$

とする. G は $X(\Omega)$ を含むことは上で示した. あとは. $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ で
あれば. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \cdot \mathbb{1}_G(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ となり. f は可測関数
の各点収束先で書ける. つまり f は可測になる.
G の可測性を示す. 定義より.

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |f_n(x) - f_N(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

であり. 各 $\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |f_n(x) - f_N(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$ は可測なので G も可測.

よって f は可測である. その構成法より $Y(\omega) = f \circ X(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$
である. ($\forall x \in X(\Omega)$ は $x \in G$ であり. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ であることに注意) //

(5) $\phi(t)$ が ${}^\forall t$ で実数 $\Leftrightarrow$ $\phi(t)=\overline{\phi(t)}$ $\Leftrightarrow$ $E[e^{itX}]=E[e^{-itX}]$

$\Leftrightarrow$ $E[e^{itX}]=E[e^{it(-X)}]$ $\Longleftrightarrow$ X と $-X$ は同じ分布

特性関数と分布は一対一対応.

(6)

Levy の反転公式を用いる.

$$\left|\frac{e^{-i\xi b}-e^{-i\xi a}}{-i\xi}\right| = \left|\int_a^b e^{-i\xi x}\,dx\right| \leq |b-a|$$

で. $\phi\in L^1(\mathbb{R})$ より Levy の反転公式の右辺の積分は絶対収束する. よって.

$$\begin{aligned}
&P(X\in(a,b))+\frac{1}{2}P(X=a\cup X=b)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi b}-e^{-i\xi a}}{-i\xi}\phi(\xi)\,d\xi\\
&\leq\frac{1}{2\pi}(b-a)\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(\xi)|\,d\xi.
\end{aligned}$$

このことから. $b\to a$ とすれば. $P(X=a)=0$ $({}^\forall a\in\mathbb{R})$ がわかる.

このとき. $a=x,\ b=x+\varepsilon$ とすれば

$$\begin{aligned}
P(X\in(x,x+\varepsilon)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-i\xi(x+\varepsilon)}-e^{-i\xi x}}{-i\xi}\phi(\xi)\,d\xi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int\left(\int_x^{x+\varepsilon}e^{-i\xi y}\,dy\right)\phi(\xi)\,d\xi\\
&=\int_x^{x+\varepsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\xi y}\phi(\xi)\,d\xi\right)dy
\end{aligned}$$

(Fubini)

である. よって. $f(y)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\xi y}\phi(\xi)\,d\xi$ は X の分布の密度関数になっている.

(7) 前にU[0,1]の特性関数は求めているので導出は省略。

$$\phi(t) = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)} = e^{\frac{1}{2}it(b+a)}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)$$

(8) X+Yの特性関数：$e^{it(b+a)}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{(b-a)t}{2}\right)$

ϕ (U[a,b]で示す)

$$= \frac{(e^{itb}-e^{ita})^2}{-t^2(b-a)^2} = \phi(t)$$

X+Yの密度：$\int|\phi(t)|dt < \infty$ より、(6)より

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\phi(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\frac{1}{-t^2(b-a)^2}\left(e^{2itb}-2e^{it(a+b)}+e^{2ita}\right)dt$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int -\frac{1}{t^2}\left(e^{it(2b-x)}-2e^{it(a+b-x)}+e^{it(2a-x)}\right)dt$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{1}{2}\left(|2b-x|-2|a+b-x|+|2a-x|\right)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\begin{cases} 0 & (x<2a) \\ x-2a & (2a\leq x\leq a+b) \\ 2b-x & (a+b<x\leq 2b) \\ 0 & (x>2b) \end{cases}$$

(ただし $\frac{1}{2\pi}\int\frac{1}{t^2}e^{itx}dt = -\frac{1}{2}|x|$ を使った)

(9) ϕ_X：Xのc.f.、ϕ_Y：Yのc.f. とする。

$\phi_X(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$ $({}^\forall t\in\mathbb{R})$

である。

ϕ_X は連続で $\phi(0)=1$ より、$\exists\varepsilon$ で $|t|\leq\varepsilon$ なら $\phi_X(t)\neq 0$ とできる。

これとき、$\phi_Y(t)=1$ $({}^\forall t: |t|\leq\varepsilon)$ である。

よって、ϕ_Y は $t=0$ で微分可能で、$\phi_Y^{(k)}(0)=0$ $({}^\forall k\geq 1)$ である。

特に $\phi_Y^{(2)}(0)=0$ である。実はこの時、$E[Y^2]<\infty$ である(Durrett. Th.3.3.9)。

すると、$\phi_Y^{(2)}(0) = -E[Y^2]$ が成り立ち、$E[Y^2]=0$ を得る。

すると、マルコフの不等式より

$$P(|X|\geqq\varepsilon)\leqq\frac{E[|X|^2]}{\varepsilon^2}=0\qquad({}^\forall\varepsilon>0)$$

となる。$\varepsilon\searrow0$とすれば $|X|=0$ (a.s.) を得る。

(10) 方針：

例えば、Xのc.f.が$[-1,1]$に台を持つ分布を考える。

(つまり $\phi_X(t)=0$ (${}^\forall t: |t|>1$))

Y, Zとして、$[-1,1]$でc.f.が一致し、その外で異なる分布を持って来れば良い。

例：(Durrettの Example 3.3.11 より)

(8)より、$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ とすれば

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$=(1-|x|)_+ \qquad ((x)_+=|x| \text{ とする})$$

であった。tとxを逆転させて

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{(1-\cos(x))}{\pi x^2}$$ とすれば

f(x)は確率密度関数になる ($\int f(x)=1,\ f(x)\geqq0$)

↖ Polyaの判定規準: Durrett, Th.3.3.10

対応するc.f.は

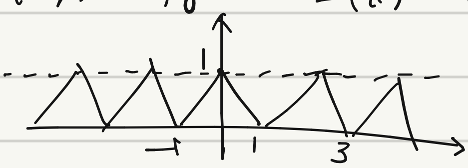
$$\phi(t)=\int e^{itx}f(x)\,dx=(1-|t|)_+$$

である。

これはPolya分布と呼ばれる。

X, Yは独立でPolya分布に従うものとする。

ここで、Zの分布のc.f.として、$(1-|t|)_+$を周期的にさせた三角波とする：$\phi_Z(t)=(1-|u|)_+$ ($u=t-2n$とする。ただし、nは整数で$2n-1\leq t<2n+1$をみたす)



この三角波は次のようにFourier級数展開できることが知られている:

$$\phi_Z(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2n-1)^2} \exp(i(2n-1)\pi t)$$

$$(t \in \mathbb{R})$$

これは $P(Z=0)=\frac{1}{2}$, $P(Z=(2n-1)\pi) = \frac{2}{\pi^2(2n-1)^2}$ $(n \in \mathbb{Z})$

なる分布のc.f.になっている.

ϕ_X の台は $[-1,1]$ で, $[-1,1]$ では $\phi_Y(t) = \phi_Z(t)$ が成り立つ.
よって

$$\phi_X(t)\phi_Y(t) = \phi_X(t)\phi_Z(t) \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

//