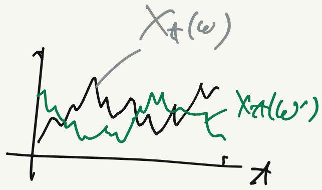
確率数理工学10

○ 確率過程

T: 時間の範囲 ($\mathbb{R}$の区間や自然数の全体)
(より一般化して、$\mathbb{R}^d$等の位相空間を考えることも多い: 時空間データ)
をインデックス集合と言う.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間
各$t \in T$に確率変数X_tが定まっているとき、
$(X_t(\omega))_{t \in T}$を確率過程(stochastic process)と言う.



確率過程の定義自体には、各$\omega \in \Omega$における$t \mapsto X_t(\omega)$の連続性等の条件は入っていないことに注意する.

• 加法過程 (or 独立増分過程)

任意の$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$に対し、

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1},\ X_{t_3} - X_{t_2},\ \cdots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

が独立.

もし、$X_0 = 0$で、$Z_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$とおくと、$(Z_i)_{i=1}^n$は独立で

$$X_{t_n} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

→ 独立な増分の和

続く.

Ex. (Brown運動, Wiener過程)

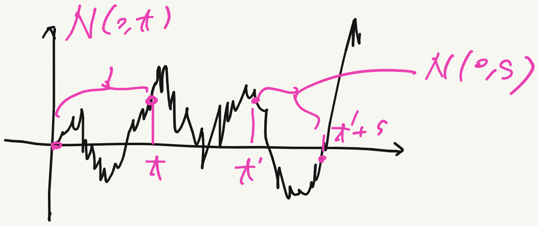
(1) $X_0 = 0$

(2) $X_{t+s} - X_t \sim N(0, s)$ (平均0, 分散sの正規分布)

(3) $(X_t)_t$ は加法過程

(4) ほとんど全てのωで $t \mapsto X_t(\omega)$ は連続

(※ (2)は t, s の取り方によらず矛盾なく仮定できる. つまり
$s = s_1 + s_2$ のとき,
$X_{t+s_1} - X_t \sim N(0, s_1)$, $X_{t+s_1+s_2} - X_{t+s_1} \sim N(0, s_2)$
であるが
$$X_{t+s} - X_t = X_{t+s_1+s_2} - X_{t+s_1} + X_{t+s_1} - X_t \sim N(0, \overbrace{s_1+s_2}^{s})$$
)



Ex. (定常ポアソン分布)

(1) $X_0 = 0$

(2) $X_{t+s} - X_t \sim P_0(\lambda s)$ ($^\forall s, t > 0$)

(3) $(X_t)_t$ は加法過程

※これも(2)は t, s の取り方によらず well-defined. ⟶ Poisson分布の再生性
($P_0(\lambda s) + P_0(\lambda t) = P_0(\lambda(s+t))$)

例えば, イベントの発生間隔が $Ex(\lambda)$ に独立に従うとき, 時刻 t までに発生するイベントの数は定常ポアソン過程に従う.

補足

$C(T)$: T上の連続関数全体の集合

$D(T)$: T上の右連続かつ左極限の存在する関数の集合

(continue à droite, limite à gauche : cadlag)

$\forall \omega \in \Omega$ 上で $X_\cdot(\omega) \in C(T)$ (tの関数として) なら C-過程

$X_\cdot(\omega) \in D(T)$ なら D-過程

と言う。

ブラウン運動はC-過程, ポアソン過程はD-過程となるように構成できる。

定理

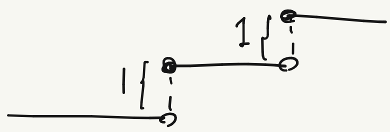
$\forall t$ で $\lim_{s \to t} P(|X_t - X_s| \geqq \varepsilon) = 0$ $(\forall \varepsilon > 0)$: 確率連続

(確率収束の意味で連続)

で、かつD-過程である加法過程のことを、Levy過程という

(1) X_t がLevy過程でさらにC-過程なら $X_t - X_s$ $(t > s)$ は正規分布に従う $\longrightarrow$ Gauss過程

(2) X_t がLevy過程でさらにa.s.で $X_t(\omega)$ がtの関数として飛躍1で増加する階段関数なら $X_t - X_s$ はPoisson分布に従う。



$\longrightarrow$ Poisson過程 (の特別な例)

より一般には、X_t はGauss過程 + Poisson過程 に分解できる。

(Levy-Itoの分解)

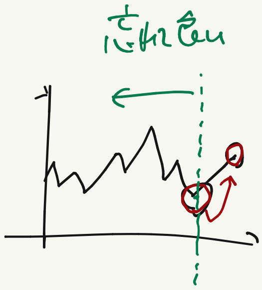
○ マルコフ過程（離散時間，$T=\{1,2,3,\dots\}$）

$$P(X_{n+1}\in A \mid X_1=x_1,\dots,X_n=x_n) \qquad (A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

$$= \begin{cases} P(X_{n+1}\in A\mid X_n=x_n) & \longrightarrow \text{1次マルコフ} \\ P(X_{n+1}\in A\mid X_{n-1}=x_{n-1},\ X_n=x_n) & \longrightarrow \text{2次マルコフ}\end{cases}$$

次の時刻の分布は直前の値のみで決まる。

それ以前は忘れて良い。



Cor

マルコフ過程なら

$\forall t_1<t_2<t_3<\cdots<t_m<n$ に対し、

$$P(X_n\in A\mid X_{t_1}=x_1,\dots,X_{t_m}=x_m)=P(X_n\in A\mid X_{t_m}=x_m)$$

//

Cor

加法過程はマルコフ過程である。

//

注：条件付き確率は厳密には定義していないが、

部分σ-加法族を用いて厳密に定義可能である。

（正則条件付き確率）

詳しくはDurrettや、伊藤清の本を参照されたい。

○ マルコフ連鎖

Def (マルコフ連鎖)

X_n のとりうる値の範囲

離散時間、離散状態 のマルコフ過程を

マルコフ連鎖 (Markov chain) と言う

1次マルコフとする

マルコフ連鎖の遷移確率行列 (transition prob. matrix):

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P(i,j) = P_{ij}$$

$$\mathbb{P} = (P(i,j))_{i,j} = (P_{ij})_{i,j}$$

$\mathbb{P}$ は n に依存しないとする $\Longrightarrow$ 斉次マルコフ

X_n の取りうる範囲を 状態空間 という

Note $P_{ij} \geq 0,\ \sum_j P_{ij} = 1$

Ex. (コイン投げ)

状態空間 = {表, 裏}

前に表が出たかどうかで、投げるコインを変える。

表 → 表 : p

表 → 裏 : $1-p$

裏 → 表 : q

裏 → 裏 : $1-q$

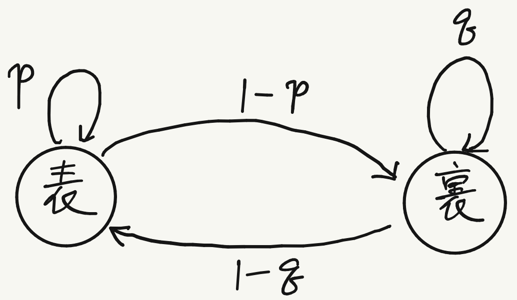
$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 表 \\ 裏 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 表 & 裏 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \end{array}$$

← 時刻 n

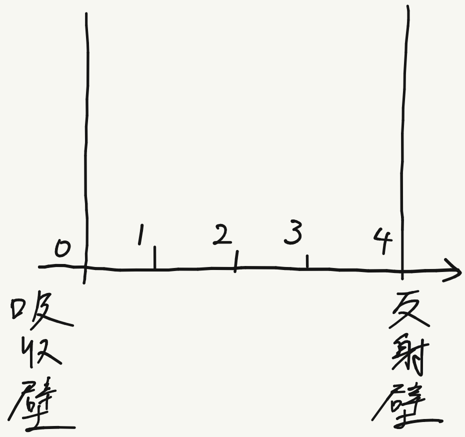
↑ 時刻 $n-1$

※ 方向に注意!!

左から右



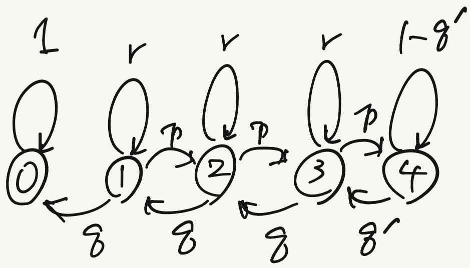
Ex. (ランダムウォーク)



0 … 吸収壁 (到達すると抜け出せない)

4 … 反射壁 (はね返される)

				確率
$i \neq 0,4$:	i	$\to i+1$	:	p
		$\to i-1$	:	q
		$\to i$	:	$1-p-q=r$
$i=4$:	i	$\to 3$	:	q'
		$\to 4$	:	$1-q'$
$i=0$:	0	$\to 0$	:	1 (吸収される)
		$\to 1$	:	0



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & q' & 1-q' \end{bmatrix}$$

X_n: 時刻 n における状態

$X_n = i$, $X_{n+1} = j$: $P(i,j)$

$X_{n+2} = j$: $p^{(2)}(i,j) = P(X_{n+2} = j \mid X_n = i)$

$$= \sum_k \underbrace{P(X_{n+2}=j \mid X_{n+1}=k)}_{= P(k,j)} \underbrace{P(X_{n+1}=k \mid X_n = i)}_{= P(i,k)}$$

$$= \sum_k p(i,k)\, p(k,j)$$

同様にして、 $p^{(m)}(i,j) \overset{\text{def}}{=} P(X_{n+m} = j \mid X_n = i)$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_{m-1}} P(i,k_1) P(k_1,k_2) \cdots P(k_{m-1}, j)$$

$$\boxed{☆\quad p^{(n+m)}(i,j) = \sum_k p^{(n)}(i,k)\, p^{(m)}(k,j)}$$

：Chapman-Kolmogorovの方程式

初期分布： $P(X_0=i)=a_i^{(0)}$ $(i=1,2,\dots)$ とすると.

$$P(X_n=j)=\sum_k P(X_n=j \mid X_0=k)\,P(X_0=k)$$

$$=\sum_k a_k^{(0)}\,p^{(n)}(k,j)$$

$$a^{(n)} = a^{(0)}\,\mathbb{P}^{(n)}$$

$a^{(n)}=(\underset{P(X_n=1)}{a_1^{(n)}},\ \underset{P(X_n=2)}{a_2^{(n)}},\ \dots)$ ：横ベクトル

Ex. (Bernoulli試行)

X_n = n回のコイン投げで表が出現した回数

状態空間 $=\{0,1,2,\dots\}$

p: 表の出る確率

$$P_{i,i+1}=p$$
$$P_{i,i}=1-p$$
$$P_{i,j}=0 \quad (j<i,\ j>i+1)$$

$$\mathbb{P}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc}0 & 1 & 2 & 3 & 4\end{array} \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\\vdots\end{array} & \begin{bmatrix}1-p & p & & & \\ & 1-p & p & 0 & \\ & & 1-p & p & \\ & 0 & & 1-p & p \\ & & & & \ddots\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\mathbb{P}^n=\begin{bmatrix}(1-p)^n & \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p & \binom{n}{2}(1-p)^{n-2}p^2 & \cdots \\ & (1-p)^n & \binom{n}{1}(1-p)^{n-1}p & \cdots \\ & & \ddots & \ddots\end{bmatrix}$$