

# 確率数理工学 11

## 2.11.27 連鎖の重要な性質

- 既約性
- 再帰性
- 正再帰性
- 周期性

## 興味のある量

- 平均再帰時間
- 平均吸収時間

## 収束性

$\left\{ \begin{array}{l} - \text{定常分布} \\ - \text{極限分布} \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{l} \text{存在?} \\ \text{収束?} \end{array}$

以降は、これら調べる

## 既約性

Def (到達可能性)

$I = \{0, 1, 2, \dots\}$  : 状態空間

- 状態  $j \in I \wedge$  状態  $i \in I \wedge$  到達可能

$\stackrel{\text{def}}{\iff} 0 \leq \exists n < \infty \text{ st } p^{(n)}(i, j) > 0$   $i \rightarrow j$

( $p^{(0)}(i, i) = 1, p^{(0)}(i, j) = 0 (i \neq j)$  とする)

- $i \in j \wedge$  相互到達可能

$\stackrel{\text{def}}{\iff} i \rightarrow j \wedge j \rightarrow i$   $i \leftrightarrow j$  (と書く)

(定義より  $i \leftrightarrow i$ )



Lem  $i \rightarrow j, j \rightarrow k \text{ なら } i \rightarrow k$  (推移的)

$\uparrow$   $4_2 \rightarrow$  クセよ //

Thm (相互到達可能性の同値関係)

- (1) 反射律 :  $i \leftrightarrow i$  ( $n=0$  時  $P^{(n)}(i,i) = 1 > 0$ )
- (2) 対称律 :  $i \leftrightarrow j \iff j \leftrightarrow i$
- (3) 推移律 :  $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \implies i \leftrightarrow k$

(証明は各自で示して欲しい)

Def 集合  $B \subset I$  が 既約 (irreducible)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall i, j \in B \text{ 必 } i \leftrightarrow j \text{ がある}$

特に  $I$  (状態空間全体) 必 既約なり。  
 そのマルコフ連鎖は既約であると言う

Def 集合  $B \subset I$  が 閉 (closed)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall j \notin B, \forall i \in B \text{ 必 } i \not\rightarrow j$

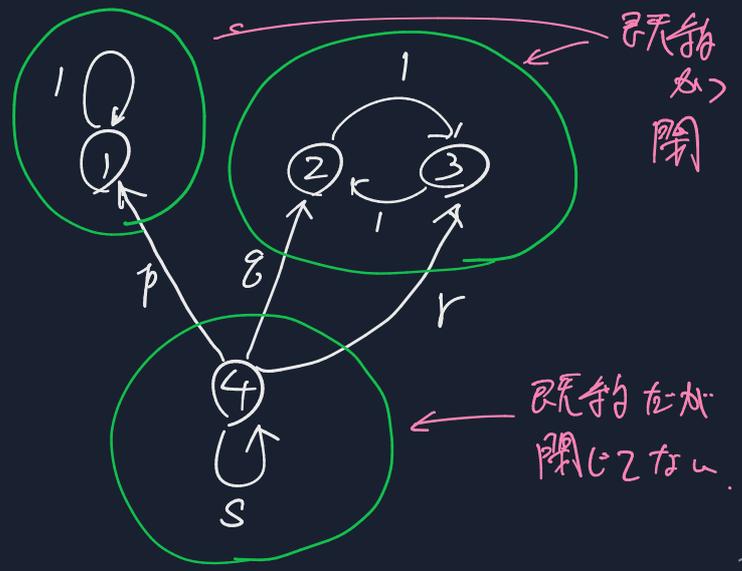
$i \rightarrow j$  必 あり。 (B内から外に出ない)

Ex. (同値類の例)

$I = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & r & s \end{bmatrix} \end{matrix}$$

( $p+q+r+s=1, p, q, r, s > 0$ )



# 再帰性

Def (初到達時刻)

状態  $j \in I$  の初到達時刻

← 二項確率変数

$$T_j \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ n \geq 1 \mid X_n = j \}$$

左に  $\infty$ .  $\forall n \geq 1$   $\exists X_n \neq j$  なら  $T_j = \infty$  になる.

$$f(i, j) = P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j = n \mid X_0 = i):$$

到達確率

Def (再帰性)

$i$  が再帰的  $\iff$   $f(i, i) = 1$  (必ず  $u$  が  $i$  に帰る  $\exists < \infty$ )

$i$  が非再帰的  $\iff$   $f(i, i) < 1$  (戻るとまた  $u$  へ 戻らない)

$N_j \stackrel{\text{def}}{=} \geq 1$  の連鎖の時刻  $n=1, 2, \dots$   $\exists$   $j \in I$  の回数

$g(i, j) := P(N_j = \infty \mid X_0 = i)$  (無限回訪れる確率)

Thm

$i$  が再帰的  $\iff$   $g(i, i) = 1$

$i$  が非再帰的  $\iff$   $g(i, i) = 0$

\*  $g(i, i)$  は 0 か 1  $\exists$  中間はない

Proof

「初到達時刻の方法」:  $T_j$  の値により事象を分類

$$P(N_i \geq n | X_0 = j)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geq n | T_i = k, X_0 = j) P(T_i = k | X_0 = j)$$

時刻  $k$  で初めて  
 $i$  に到達

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geq n | T_i = k) P(T_i = k | X_0 = j)$$

( $\because$  Markov性, 時刻  $k$  で  $i$  に到達すると  
その前のことは忘れてよい)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geq n-1 | X_0 = i) P(T_i = k | X_0 = j)$$

(時刻  $k$  で時刻 0 とおきかえる.  $k=1$  は 1回  $i$  に来るときの事.  
 $N_i$  のカウントを 1つ減らす.)

$$= P(N_j \geq n-1 | X_0 = i) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} P(T_i = k | X_0 = j)}$$

$$\parallel$$
$$P(T_i < \infty | X_0 = j) = f(i, i)$$

$$= P(N_j \geq n-1 | X_0 = i) f(i, i)$$

$\vdots$

$$= \underbrace{P(N_j \geq 0 | X_0 = i)}_{\parallel} f(i, i)^{n-1} f(i, i) = f(i, i) f(i, i)^{n-1}$$

$\parallel$   
1

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P(N_j \geq n | X_0 = i) = \begin{cases} 0 & (f(i, i) < 1) \\ 1 & (f(i, i) = 1) \end{cases}$

$$g(i, i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(N_j \geq n | X_0 = i) = \begin{cases} 0 & (f(i, i) < 1) \\ 1 & (f(i, i) = 1) \end{cases}$$

$$\parallel \quad \parallel$$
$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{N_j \geq n\} \mid X_0 = i\right)$$

///

Thm  $\lambda$  が再帰的  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(\lambda, \lambda) = \infty$

Proof  $X_0 = j$  のとき

$$z_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (X_n = \lambda) \\ 0 & (X_n \neq \lambda) \end{cases}$$

よって  $N_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$  であることに注意 (注意:  $\lambda$  は訪ねた回数)

このとき

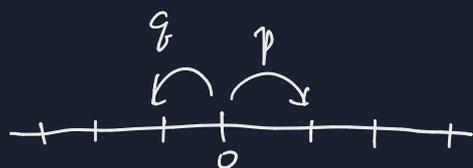
$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} z_n \mid X_0 = \lambda\right] \stackrel{\text{単調収束}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E[z_n \mid X_0 = \lambda] = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(\lambda, \lambda)$$

一方、この左辺は次のように評価できる:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=1}^{\infty} z_n \mid X_0 = \lambda\right] &= E[N_\lambda \mid X_0 = \lambda] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}\{N_\lambda \geq k\} \mid X_0 = \lambda\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_\lambda \geq k \mid X_0 = \lambda) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda, \lambda)^k \quad \leftarrow \text{前の定理の証明より} \end{aligned}$$

よって  $\lambda$  が再帰的  $\iff f(\lambda, \lambda) = 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(\lambda, \lambda) = \infty //$

Ex. (ランダムウォーク)



1回の推移で右に移動確率:  $p$

1回の移動で左に移動確率:  $1-p=q$

$$p^{(2n+1)}(0,0) = 0$$

$$p^{(2n)}(0,0) = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n$$

( $n$ 回右,  $n$ 回左)

Stirlingの公式より  $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$  なるので

$$p^{(2n)}(0,0) \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}$$

ここで  $4pq \leq 1$  なるので

$p=q=\frac{1}{2}$  のときは

$4pq=1$  なるので、以下をえらう。

(i)  $p=q=\frac{1}{2}$  のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0,0) = \infty \rightarrow \underline{\underline{\text{再帰的}}}$$

(ii)  $p \neq q$  のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0,0) < \infty \rightarrow \underline{\underline{\text{非再帰的}}}$$

Note

- ・ 2次元格子上のランダムウォークは再帰的 (対称性は仮定)
- ・ 3次元以上だと 非再帰的

# - 既約性と再帰性

Lem (1) 状態  $i$  が再帰的かつ  $i \rightarrow j$  ならば  $j$  も再帰的

(2) 有限で閉じた集合  $A$  上は再帰状態が少なくとも1つは存在.

## Proof

(1) まず  $f(j, i) = 1$  を示す. (特に  $j \rightarrow i$ )

$i$  が再帰的ならば  $f(i, i) = 1$  である.

$i \rightarrow j$  あり、ある  $i = i_0, i_1, \dots, i_k = j$  なる経路が存在する

$$P(i, i_1) P(i_1, i_2) \dots P(i_{k-1}, j) > 0$$

とである. 今  $i$  から  $j$  に至り、 $j$  から  $i$  に戻らないう事実を

考えよう.

$$0 = 1 - f(i, i) \geq \underbrace{P(i, i_1) \dots P(i_{k-1}, j)}_{> 0} \underbrace{(1 - f(j, i))}_{j \text{ から } i \text{ に戻らないう事実}}$$

$$\Rightarrow f(j, i) = 1 \text{ である.}$$

以上より  $i \leftrightarrow j$  である.

すなわち、ある  $m, n > 0$  が存在する.

$$P^{(m)}(i, j) > 0, \quad P^{(n)}(j, i) > 0$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} P^{(n+m+k)}(j, j) \geq \sum_{k=0}^{\infty} P^{(m)}(j, i) P^{(k)}(i, i) P^{(n)}(i, j)$$

$$= \underbrace{P^{(m)}(j, i)}_{> 0} \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(i, i) \right)}_{= \infty} \underbrace{P^{(n)}(i, j)}_{> 0}$$

$$= \infty \quad (\because i \text{ が再帰的})$$

よって、 $j$  は再帰的.



(2) 全2の  $\lambda \in A$  が非再帰的とL2. 矛盾を導く.

前の定理の言証明より、 $\forall j \in I$  に対し、

$$E[N_i | X_0 = j] = \sum_{k=1}^{\infty} f(i, i)^{k-1} f(j, i) < \infty$$

である。よって、 $A$  が有限であることより

$$\infty \neq \sum_{i \in A} E[N_i | X_0 = j] = E\left[\sum_{i \in A} N_i | X_0 = j\right]$$

であるが、 $A$  は閉じているため、常にその中に状態  $X_n$  は

とどまると、 $\sum_{i \in A} N_i = \infty$  となるので、矛盾する。 //

Thm 集合  $A$  が有限で、既約かつ閉なら、 $A$  の全2の状態は再帰的である。

Proof Lem の (2) より、 $A$  に再帰的な状態が少なくとも1つは含まれる。よって  $i$  とする。  $A$  は既約なので、 $\forall j \in A$  に対し、 $i \rightarrow j$  である。  $i$  が再帰的なので、Lem (1) より  $j$  も再帰的。 //

Thm (一致団結の性質)

同一の同値類に属する状態は全2再帰的か、

全2非再帰的かのいずれかである。 //

( $\because$  Lem (1) より、ほぼ自明)

※ 再帰性は既約成分全体の性質  $\Rightarrow$  クラスの性質

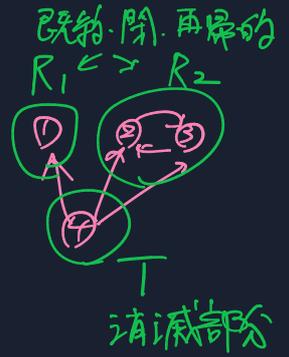
# Thm (既約成分の分割)

$T = \{i \in I \mid \exists j \in I \text{ 之 } i \rightarrow j \text{ かつ } j \rightarrow i\}$ : 消滅部分  
とすると.

$$I - T = R_1 \cup R_2 \cup \dots \quad (R_i \cap R_j = \emptyset, i \neq j)$$

と分割できると、各  $R_k$  は 既約かつ閉.

さらに、 $I$  が有限なら全ての  $R_k$  は 再帰的 //



## Proof

$i \in I - T$  とし、 $Z \neq \emptyset$ .  $C(i) = \{j \mid i \rightarrow j\}$  とおく.  
( $i$  から到達可能な領域)

$i \notin T$  より、任意の  $i \rightarrow j$  なる  $j$  には  $j \rightarrow i$  がない。

つまり、 $\forall j \in C(i)$  は  $i \leftrightarrow j$  がない。

よって、 $\forall k, l \in C(i)$  は、 $k \leftrightarrow i, l \leftrightarrow i$  があるから、 $k \leftrightarrow l$  はない。つまり、 $C(i)$  は既約。

さらに、 $C(i)$  は閉であることがわかる。なぜなら、 $j \in C(i)$  とし、ある  $k \in I$  には  $j \rightarrow k$  があるとすると、 $i \rightarrow j$  であるから  $i \rightarrow k$  となるので、 $k \in C(i)$  である。つまり、 $C(i)$  は閉。

以上より、 $C(i)$  は既約かつ閉。

このようにして、各  $i \in I - T$  は既約かつ閉な集合  $C(i)$  に含まれる。もし、別の  $j \in I - T$  に関する  $C(j)$  が、 $C(i) \cap C(j) \neq \emptyset$  だとすると、 $i \leftrightarrow j$  も成り立つので、 $C(i) = C(j)$  である。

よって、 $I - T = R_1 \cup R_2 \cup \dots$  と分割できる。

最後に、 $I$  が有限なら各  $R_k$  も有限なので、 $R_k$  は再帰的  
(前のThmより) //

$$P = \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_N \\ T \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_N & T \\ \hline P_1 & & & & & \\ & P_2 & & & 0 & \\ & & P_3 & & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & P_N & \\ \hline Q_1 & Q_2 & Q_3 & \dots & Q_N & F \end{array} \right], \quad P^n = \left[ \begin{array}{cccc|c} P_1^n & & & & \\ & P_2^n & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & P_N^n & \\ \hline * & * & \dots & * & F^n \end{array} \right]$$

\* Tは消滅部分 (dissipative point) と呼ぶ。

Tは前の補題より、 $\forall \lambda \in T$  は非再帰的

( $\lambda$ が再帰的なら、 $i \rightarrow j$  があると  $j \rightarrow i$  となり、 $\lambda \notin T$  となる。)