

# 確率数理工学12

## 再帰性と到達時刻

Def (平均到達時間と平均再帰時間)

$m(i, j) =$  状態  $i$  から  $j$  への平均到達時間

$$\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} k P(T_j = k | X_0 = i) = E[T_j | X_0 = i] \\ \infty \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{if } P(T_j < \infty | X_0 = i) = 1 \\ \text{(otherwise)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \parallel \\ f(i, j) \end{array}$$

( $T_j = \inf \{n \geq 1 | X_n = j\}$ )

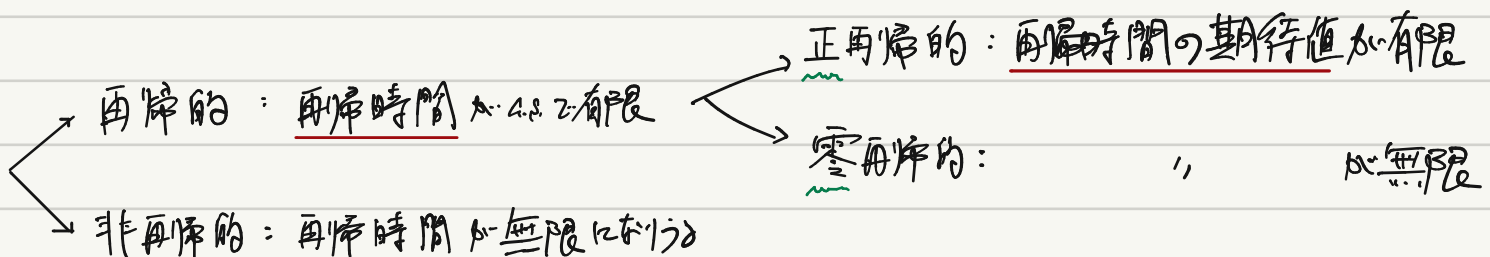
$m(i, i)$  は平均再帰時間 と呼ぶ  
↑  
同じ

Def (正再帰性)

$i$ : 再帰的 なとき

$$\left\{ \begin{array}{l} i \text{ が正再帰的} \iff m(i, i) < \infty \\ i \text{ が零再帰的} \iff m(i, i) = \infty \end{array} \right. \stackrel{\text{def}}{}$$

(非再帰的 なり 自由的  $\iff m(i, i) = \infty$  である)



# 平均到達時間の計算法

$$m(i, j) = p(i, j) \times 1 + \sum_{k \neq j} p(i, k) \left\{ 1 + m(k, j) \right\}$$

$\uparrow$   $i \rightarrow j$  の 1 step での到達  
 $\uparrow$  次の時刻に  $k$  に到達  
 $\uparrow$   $i$  から  $k$  に行くための必要 step 数  
 $\uparrow$   $k$  から  $j$  への到達に必要な step 数

$$\Rightarrow m(i, j) = 1 + \sum_{k \neq j} p(i, k) m(k, j)$$

$(\because p(i, j) + \sum_{k \neq j} p(i, k) = \sum_{k \in I} p(i, k) = 1)$

この方程式を各  $j$  ごとに解く。

$i = j$  とおけば平均再帰時間も求まる。

解が一意的なければ最小の非負解 ( $m(i, j)$ ) がとれる。

Ⓢ

(証明は与えないが、補足資料の吸収確率の計算と同様に示せる。)

## Def (吸収確率)

$i$ : 非再帰的な状態

$j$ : 再帰的な状態 (分解定理より、ある再帰的な既約成分に含まれる)

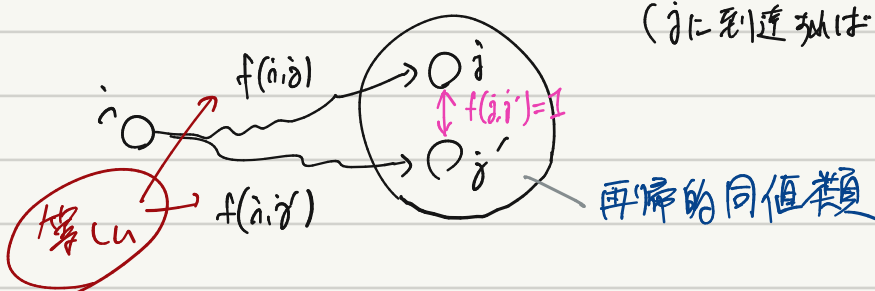
$i$  から  $j$  への吸収確率  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$   $i$  から  $j$  を含む再帰的な同値類への到達確率

Prop  $j$  が再帰的かつ  $j \rightarrow j'$  なら  $f(j, j') = 1$  である。

Proof 前回の講義資料より、 $f(j, j) = 1$  であることは示せておき、

よって、 $j \rightarrow j'$  かつ、 $j'$  が再帰的なので、再び同様の議論より、 $f(j, j') = 1$  である。

$\Rightarrow$  このことから、 $\forall j' \in C(i)$  として、 $f(i, j) = f(i, j')$  が成り立つ。



( $j$  に到達するには必ず  $j'$  にも到達し、逆も成り立つ)

⚡ (1-5) に証明

(参考)  $\forall k \in C(j) \Rightarrow u_2, f(i, k) = f(i, j) = 1$  の証明

$$\begin{aligned}
 f(i, k) &= P(T_k < \infty | X_0 = i) \geq P(T_j \leq T_k < \infty | T_j < \infty) P(T_j < \infty | X_0 = i) \\
 &= \underbrace{P(T_k < \infty | X_0 = j)}_{f(j, k) = 1} P(T_j < \infty | X_0 = i) = f(i, j)
 \end{aligned}$$

↑  $j$  へ通るから  $k$  へ到達する

$k$  と  $j$  が逆方向の場合、 $f(i, k) \leq f(j, k)$  も得るから、 $f(i, k) = f(i, j)$

## 吸収確率の計算方法

$C(i)$ :  $i$  を含む再帰的状態値類 (閉かつ既約)

$T$ : 非再帰的状態の集合

$$f(i, j) = P(i, j) + \sum_{\substack{k \in C(i) \\ (k \neq j)}} P(i, k) f(k, j) + \sum_{k \in T} P(i, k) f(k, j) + \sum_{k \in I - C(i) - T} P(i, k) f(k, j)$$

$$\text{よって} \quad \begin{cases} k \in C(i) & \Rightarrow f(k, j) = 1 \\ k \in I - C(i) - T & \Rightarrow f(k, j) = 0 \end{cases} \quad (\text{分解定理})$$

よって:

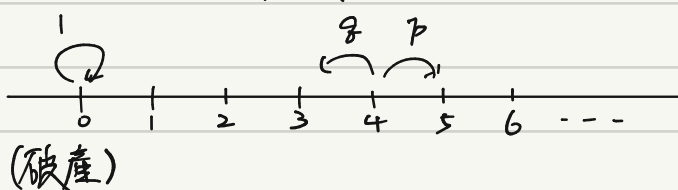
$$f(i, j) = \sum_{k \in C(i)} P(i, k) + \sum_{k \in T} P(i, k) f(k, j)$$

$\Rightarrow$  この方程式を解けばよい。

( $\forall j \in C(i)$  について  $f(i, j) = f(i, j)$  とおける)

解が一意的な場合は最小の非負解が存在する。

# Ex. ギャンブラーの破産確率



確率  $p$  で  $+1$  万円  
 $q$  で  $-1$  万円  
 所持金  $0$  で破産

資産  $i$  から始めて破産する確率を求めよ

$a(0) = 1$ ,  $a(i)$ :  $i$  から始めて破産する確率 ( $= f(i, 0)$ )

方程式:  $a(i) = p a(i+1) + q a(i-1)$  ( $i=1, 2, \dots$ )

$a(0) = 1$

$\Rightarrow p [a(i+1) - a(i)] = q [a(i) - a(i-1)]$

$\Rightarrow \begin{cases} a(i) = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^i & (p \neq q) \\ a(i) = \alpha + \beta i & (p = q = \frac{1}{2}) \end{cases}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  とする。

(i)  $p < q$  のとき  $0 \leq a(i) \leq 1$  ( $\forall i$ )  $\Rightarrow \beta = 0$  (理由は  $a(i) \rightarrow \infty$  又は  $-\infty$ )  
 $\therefore a(0) = 1$  から  $\alpha = 1$  なのだから  $a(i) = 1$  ( $\forall i$ )  
 $\rightarrow$  必ず破産する

(ii)  $p = q$  のとき  $0 \leq a(i) \leq 1$  ( $\forall i$ )  
 $\Rightarrow \beta = 0$   
 $a(0) = 1$   $\Rightarrow \alpha = 1$   $\therefore a(i) = 1$  ( $\forall i$ )  
 $\rightarrow$  必ず破産する

(iii)  $p > q$  のとき  $i \rightarrow \infty$   $\therefore a(i) \rightarrow \alpha$  である。  
 一方、 $i=0$   $\therefore a(0) = \alpha + \beta = 1$   
 $\therefore$  最小の非負解は  $\alpha = 0, \beta = 1$   $\therefore$  達成される。  
 つまり、  
 $a(i) = \left(\frac{q}{p}\right)^i$   
 $\rightarrow$  運が良ければ破産しない

# Thm (平均再帰時間の性質と正再帰性の条件)

任意の  $i, j$  に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(i, j) = \frac{f(i, j)}{m(i, j)}$$

← 到達確率  
← 平均再帰時間

$$\text{特 } j \text{ が正再帰的} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(j, j) > 0$$

$\forall m(i, j) < \infty$

(証明はCronF)

直感的説明:  $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(i, j)$  は " $i$  から出発して  $n$  ステップ目まで平均的に  $j$  に滞在した時間の割合" である。  
 → 特  $i$  から  $j$  に到達する確率は  $f(i, j)$ 、 $j$  に到達したら  $m(i, j)$  時間後に  $j$  に戻るので、  
 平均的に  $\frac{1}{m(i, j)}$  の割合で  $j$  に滞在したことになる。 //

Cor  $I$  が既約であるとする。

(i)  $j$  が正再帰的なら  $\forall i \in I$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n p^{(l)}(i, j) = \frac{1}{m(i, j)} > 0$$

(ii)  $j$  が零再帰的なら  $\forall i \in I$  に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i, j) = 0$$

(∵ (i):  $I$  が既約である。  $j$  が正再帰的なら  $f(i, j) = 1$  であるから示すことができる。  
 ∵ (ii) は Thm 1) 示す)

(ii) は自明である。証明は省略。)

(Thm の proof)

$$Z_n = \begin{cases} 1 & (X_n = j) \\ 0 & (X_n \neq j) \end{cases} \text{ とする。 } N_j(n) = \sum_{k=1}^n Z_k \text{ とする。}$$

時刻  $k$  まで  $j$  に  $n$  回滞在

$$E[N_j(n) | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n E[Z_k | X_0 = i] = \sum_{k=1}^n p^{(k)}(i, j) \text{ (注意する)}$$

(i) 特  $i = j$  を考える ( $X_0 = i = j$ )

$T_j^{(k)}$  を状態  $j$  を  $k$  回訪ねる時間とする ( $T_j^{(k)} = \inf \{n \geq 1 \mid N_j(n) \geq k\}$ )

$T_j^{(0)} = 0$  とする。

これは  $n$  が無条件で  $\infty$  とする

$t_k = T_j^{(k)} - T_j^{(k-1)}$  とおす。すると、 $t_k$  は独立同分布に従う。(Markov性)  
 よって、大数の強法則より

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} + t_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a.s.} E[t_1] = E[T_j | X_0 = j] = m(j, j)$$

また、 $T_j^{(k)}$  の定義より  $T_j(N_j(n)) \leq n < T_j(N_j(n)+1)$

よって、

$$\frac{T_j(N_j(n))}{N_j(n)} \leq \frac{n}{N_j(n)} < \frac{T_j(N_j(n)+1)}{N_j(n)+1} \cdot \frac{N_j(n)+1}{N_j(n)}$$

$\left( \begin{array}{l} \text{これは} \\ m(j, j) = \infty \text{ の} \\ \text{中では} \\ \text{(零再帰的では} \\ \text{o.k.)} \end{array} \right)$

よって、

(a)  $\iff j$  が再帰的であれば一定値に  $N_j(n) \rightarrow \infty$  (a.s.)

前資料より、 $(j(j, j) = 1)$

よって、

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow m(j, j) \quad (a.s.)$$

(b) 一方、 $j$  が非再帰的ならば  $P(\lim_{n \rightarrow \infty} N_j(n) < \infty | X_0 = j) = 1$  となる。

$1 - g(j, j)$

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow \infty \quad (a.s.)$$

よって、一方、 $j$  が非再帰的ならば  $m(j, j) = \infty$  となる。

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow m(j, j) \quad (a.s.) \text{ を得る。}$$

(ii)  $i \neq j$  のとき、

$$\frac{T_j^{(k)}}{k} = \underbrace{\frac{t_1}{k}}_{\frac{T_j}{k}} + \frac{t_2 + \dots + t_k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{a.s.} \begin{cases} m(j, j) & (T_j < \infty) \\ \infty & (T_j = \infty) \end{cases}$$

(i), (ii) より、よって、

$$\frac{n}{N_j(n)} \rightarrow \begin{cases} m(j, j) & (\text{if } T_j < \infty) \\ \infty & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (a.s.)$$

$$\Rightarrow \frac{N_j(n)}{n} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{m(j, j)} \mathbb{1}[T_j < \infty] \quad (a.s.)$$

両辺の期待値をとれば. ル1=7の優収束定理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p^{(n)}(i, j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{N_j^{(n)}}{n} \mid X_0 = i \right] \\ &= E \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_j^{(n)}}{n} \mid X_0 = i \right] \\ &= E \left[ \frac{1}{m(i, j)} \mathbb{1}_{[T_j < \infty]} \mid X_0 = i \right] \\ &= \frac{1}{m(i, j)} \cdot P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \frac{f(i, j)}{m(j, j)} \quad // \end{aligned}$$

## 定常分布と極限分布

Def (定常分布)

$\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots) : I$  上の分布

$\pi$  が 定常分布  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi = \pi P \quad (\pi(j) = \sum_{i \in I} \pi(i) P(i, j))$   
: 平衡方程式

\* Markov 連鎖で更新しても分布が変わらない

(定常分布が存在するとき限り)

Def (極限分布)

$\pi_n(j) := \sum_{i \in I} \pi_0(i) P^{(n)}(i, j) \quad (\pi_0 \text{ は初期分布})$

( $n$  ステップ目にとの状態にいつあるかを表した分布)

$\pi$  が 極限分布  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  任意の  $\pi_0$  に対し.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(j) = \pi(j) \quad (\forall j \in I)$$

(離散分布なので法則収束)

(極限分布が存在するとき限り)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{極限分布}$$

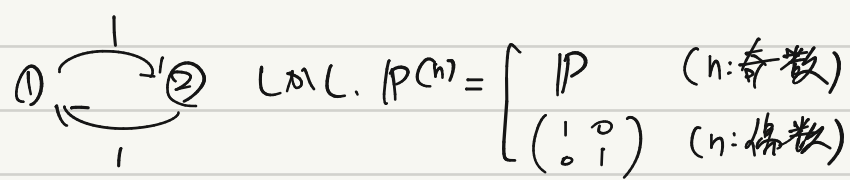
という形をとることを示すことができる.

$\pi(j) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$   
と決まってくる.

Note ◦ 極限分布が存在すれば、それは一意の定常分布である。  
 → チェックせよ。

◦ 定常分布が存在しても 極限分布が存在するとは限らない。

反例:  $\pi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi P = \pi \neq \pi, \pi$  は定常分布



→ 周期性がある  
 $\pi_0 = (1 \ 0)$  とおくと

$$\pi_n = \begin{cases} (0 \ 1) & (n: \text{奇数}) \\ (1 \ 0) & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

→ 収束しない。 極限分布は存在しない。

Thm (ZLZ連鎖の定常分布)

ZLZ連鎖は 既約 であると仮定する。

すると、以下は同値

- (1) ある  $j \in I$  が正再帰的
  - (2) 全の  $j \in I$  が正再帰的
  - (3) 定常分布  $\pi$  が存在する。
- (1), (2) の正再帰性は  
 7.2.2 の性質)

(1), (2), (3) のうち、定常分布は一意に定まる。

$$\pi(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(j, j) = \frac{1}{m(j, j)}$$

で表される。 ( $j$  から  $j$  に戻ってくるまでの平均時間  $m(j, j) \rightarrow j$  の平均的  $\lfloor \frac{1}{m(j, j)} \rfloor$  の割合で滞在)

Lem 正再帰的な  $j$  に対して、

$$\mu(i) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i, T_j > n | X_0 = j)$$

←  $j$  を出発して再び  $j$  に戻りきるまで  $i$  がいくつあるかの期待値

とすると、 $\pi(i) = \frac{\mu(i)}{m(j, j)}$  は定常分布になる。

(I の既約性は仮定してある。定常分布は一意とは限らない)

( $\pi(i)$  は  $j$  を出発して  $j$  に戻りきるまで、 $i$  がいくつあるかの期待値を表す)



(Lem の Proof)  $\sum_{i \in I} \mu(i) = P(X_0 = j, T_j > 0 | X_0 = j) = 1$  である。

( $P(T_j < \infty | X_0 = j) = 1$  に注意)

$$\begin{aligned} \text{また, } \sum_{i \in I} \mu(i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in I} P(X_n = i, T_j > n | X_0 = j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(T_j > n | X_0 = j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j \geq n | X_0 = j) \\ &= E[T_j | X_0 = j] = m(j, j) \end{aligned}$$

よって,  $\pi$  は 確率分布 となる。

$\bar{P}^{(k)}(j, i) = P(X_l = i, T_j > l | X_0 = j)$  とおくと,  $\mu$  の定義より

$$\sum_i \mu(i) P(i, k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) P(i, k)$$

である。右辺 =  $\mu(k)$  なら  $\pi$  ( $\propto \mu$ ) は 定常分布 となる。

(i) ( $k \neq j$  のとき)

$$\begin{aligned} &\sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) P(i, k) \\ &= \sum_i P(X_l = i, T_j > l, X_{l+1} = k | X_0 = j) \\ &= P(T_j > l, X_{l+1} = k | X_0 = j) \\ &= P(T_j > l+1, X_{l+1} = k | X_0 = j) \quad (\because j \neq k) \\ &= \bar{P}^{(k+1)}(j, k) \end{aligned}$$

よって,  $\sum_{l=0}^{\infty} (\text{右辺}) = \mu(k)$  となる。 ( $j \neq k$  に注意)

(ii) ( $k = j$  のとき)

上と同様に

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{P}^{(k)}(j, i) P(i, k) &= \sum_i P(X_l = i, T_j > l, X_{l+1} = \overset{k}{j} | X_0 = j) \\ &= P(T_j = l+1 | X_0 = j) \end{aligned}$$

よって,

$$\sum_{l=0}^{\infty} (\text{右辺}) = P(T_j < \infty | X_0 = j) = 1 = \mu(j)$$

(Proof of Thm)

(2)  $\rightarrow$  (1) は明らか.

(1)  $\rightarrow$  (2)

$i \in I$  を任意に取る.  $j \in I$  は正再帰的  $\Sigma$  状態と仮定.

既約性より,  $i \leftrightarrow j$  である.

よって,  $\exists k, m \in \mathbb{N}$  として  $P^{(k)}(i, j) > 0, P^{(m)}(j, i) > 0$  である.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(i, i)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(i, i) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m+k} \sum_{l=1}^n \underbrace{P^{(k)}(i, j)}_{>0} P^{(l)}(j, j) \underbrace{P^{(m)}(j, i)}_{>0} \\ &= \frac{P^{(k)}(i, j)}{>0} \frac{P^{(m)}(j, i)}{>0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m+k} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(j, j) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\frac{1}{m(j, j)} > 0$

( $\because j$  は正再帰的.

$m$  の性質より)

より,  $i$  は正再帰的.

(2)  $\rightarrow$  (3)  $\forall \lambda$  が正再帰的ならば, 直前の Lem より  
ある定常分布が存在する.

(3)  $\rightarrow$  (2)

既約性より, 定常分布  $\pi$  (= 対し,  $\pi(j) > 0$  なる  $j \in I$ ) がある.

$\forall i \in I$  として  $j \rightarrow i$  である. よって, ある  $n \in \mathbb{N}$  として  $P^{(n)}(j, i) > 0$

とできる. よって

$$\pi(i) = \sum_{j'} \pi(j') P^{(n)}(j', i) \geq \pi(j) P^{(n)}(j, i) > 0$$

となる. 一方,  $\forall j \in I$  である

$$\pi(j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{k \in I} \pi(k) P^{(k)}(k, j) \right)$$

( $\because \pi = \pi(j), \pi$  は定常分布なので)

$$= \sum_{k \in I} \pi(k) \left( \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P^{(l)}(k, j) \right)$$

$n \rightarrow \infty$   
↓  
停収束  
定理

$$\sum_{k \in I} \pi(k) \frac{f(k, j)}{m(j, j)}$$

これと  $\pi(i) > 0$  を合わせると、 $\frac{1}{m(i,i)} > 0$  である。

よって、 $m(i,i) < \infty$ 、つまり  $i$  は正再帰的。特に  $i$  は再帰的。

既約性と再帰性より、 $f(i,i) = 1$  (必ず) となり、 $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$  が成り立つ。

(一意性) 上の議論で、 $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$  が  $\frac{1}{\sum_j \pi(j)}$  (つまり  $1$ ) ので、一意性も示すことができる。

Def (周期性)

$i$  の周期  $d(i) = p^{(n)}(i,i) > 0$  なる  $n \geq 1$  の最大公約数

Lem

$i \leftrightarrow j$  なら  $d(i) = d(j)$  (周期はクラスの性質)

Thm (極限分布の存在条件)

マルコフ連鎖が既約であること。

連鎖が  $\begin{cases} \text{正再帰的} \\ \text{非周期的} \end{cases} \iff \underline{\text{極限分布が存在}}$

Note この極限分布は定常分布で  $\pi(i) = \frac{1}{m(i,i)}$  である。

正再帰的なら定常分布が存在。

Lem 既約で正再帰的なマルコフ連鎖が非周期的なら  $\forall i, j \in I$  で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i,j) = \frac{1}{m(i,i)} = \pi(i) \text{ (定常分布)}$$

周期的 ( $d(i) \geq 2$ ) なら、 $p^{(n)}(i,j)$  は収束しない。

(証明は、カッパの法による。補足資料を参照のこと)

(Proof of Thm)

( $\Rightarrow$ ) Lem 12 対.

( $\Leftarrow$ ) 極限分布が存在すれば、定常分布が存在するので、正再帰的.

また、先の Lem 11) 周期的なら  $p^{(n)}(i, i)$  は収束せず.

極限分布が存在しなくなるので、非周期的でなくともよい.

Thm (大数の強法則)

既約かつ定常分布  $\pi$  が存在すると、(極限分布の存在は仮定しない)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$  かつ  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |f(i)| \pi(i) < \infty$  (つまり  $E_{i \sim \pi}[|f(i)|] < \infty$ )  
可積分

なら、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) \xrightarrow{\text{a.s.}} E_{\pi}[f(X)] \quad (4.8)$$

↑  
Z(1)連鎖

\* 大数の強法則により、MCMC法が正当化される.