演習問題

(1) 「確率測度の基本公式」を全て証明せよ。

(2) $\Omega=\{1,2,3\}$ 上の以下の集合族を考える。それぞれ σ-加法族になっているかどうか答えよ:

① $\mathcal{F}=\{\phi,\{1\},\{1,3\},\{1,2\},\Omega\}$

② $\mathcal{F}=\{\phi,\Omega\}$

③ $\mathcal{F}=\{\phi,\{2,3\},\{1\},\Omega\}$

(3) σ-加法族 $\mathcal{F}$ に対し「$A_1,A_2,\dots\in\mathcal{F}\Rightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$」を示せ.

(4) σ-加法族 $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ に対し、$\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$ が σ-加法族にならない例を作れ。

(5) σ-加法族の列 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots$ であって $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ が σ-加法族にならない例を作れ.

(6) $\Omega=\mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合で A または A^c が可算集合となる任意の集合からなる集合族とする. $P(A)=0$ (Aが可算), $P(A)=1$ (A^cが可算) としたとき. $(\Omega,\mathcal{F},P)$ は確率空間になることを示せ。

(7) Borel集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は任意の開集合を含むことを示せ.

(8) Borel集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は半開区間 $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ を含むことを示せ.

(9) Borel集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は任意の開区間 (a,b) $(a<b)$ を含む最小の σ-加法族であることを示せ。

(10) $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (Ωの部分集合全体), Pは$(\Omega,\mathcal{F})$上の確率測度.
$P(\{1\})$, $P(\{1,2\})$ の値が定まっているとき、$\forall A \in \mathcal{F}$に対し
$P(A)$が一意に定まるか?

(11) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}]$ は $(0,1)$ か $(0,1]$ か、それともどちらでもないか.
答えよ。同様に $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1+\frac{1}{n})$ を求めよ。