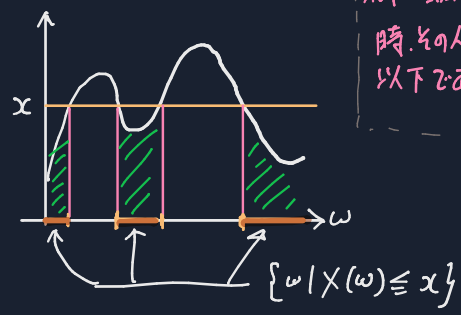


確率数理工学 (2)

例: 日本人の身長に選んだ時、その人の身長が170cm以下である事象は可測。



Def (確率変数)

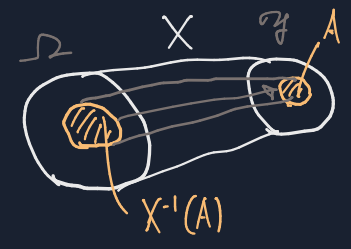
(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間

関数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ 2

$$X^{-1}((-\infty, x]) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

を満たす時、 X を 確率変数 (random variable, r.v.) と呼ぶ。

[注] 「逆像」
 $X: \Omega \rightarrow \mathcal{Y}$ とし
 $A \subset \mathcal{Y}$ に対し
 $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$



- $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ のこと $\{X(\omega) \leq x\}$ と書く。
 $\{X(\omega) \leq x\}$ なる事象は可測 (\mathcal{F} に含まれる) であることから「可測関数」とも言う。

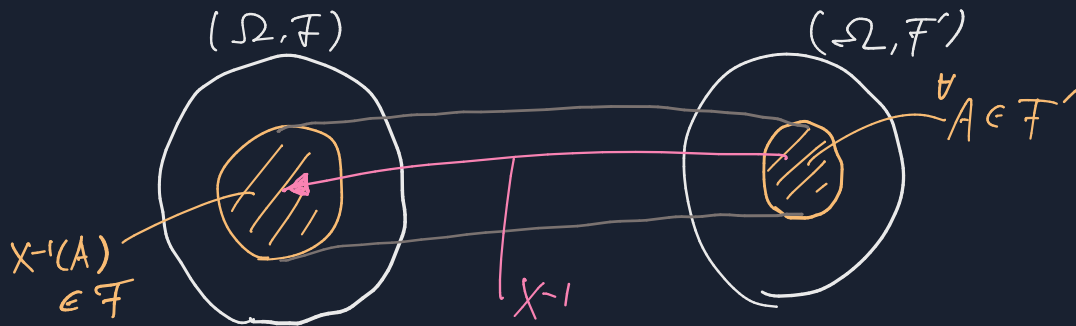
「確率変数 = 可測関数」

- 任意のホリル集合 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ であること。上記の定義は同値。(証明は次回)

- より一般に、可測空間 (Ω, \mathcal{F}) , (Ω', \mathcal{F}') に対し、

$X: \Omega \rightarrow \Omega'$ $\forall A \in \mathcal{F}'$ 2. $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ をみたす時、 X を \mathcal{F}/\mathcal{F}' -可測関数 と言う。

(このとき、 $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ と書いたりする)



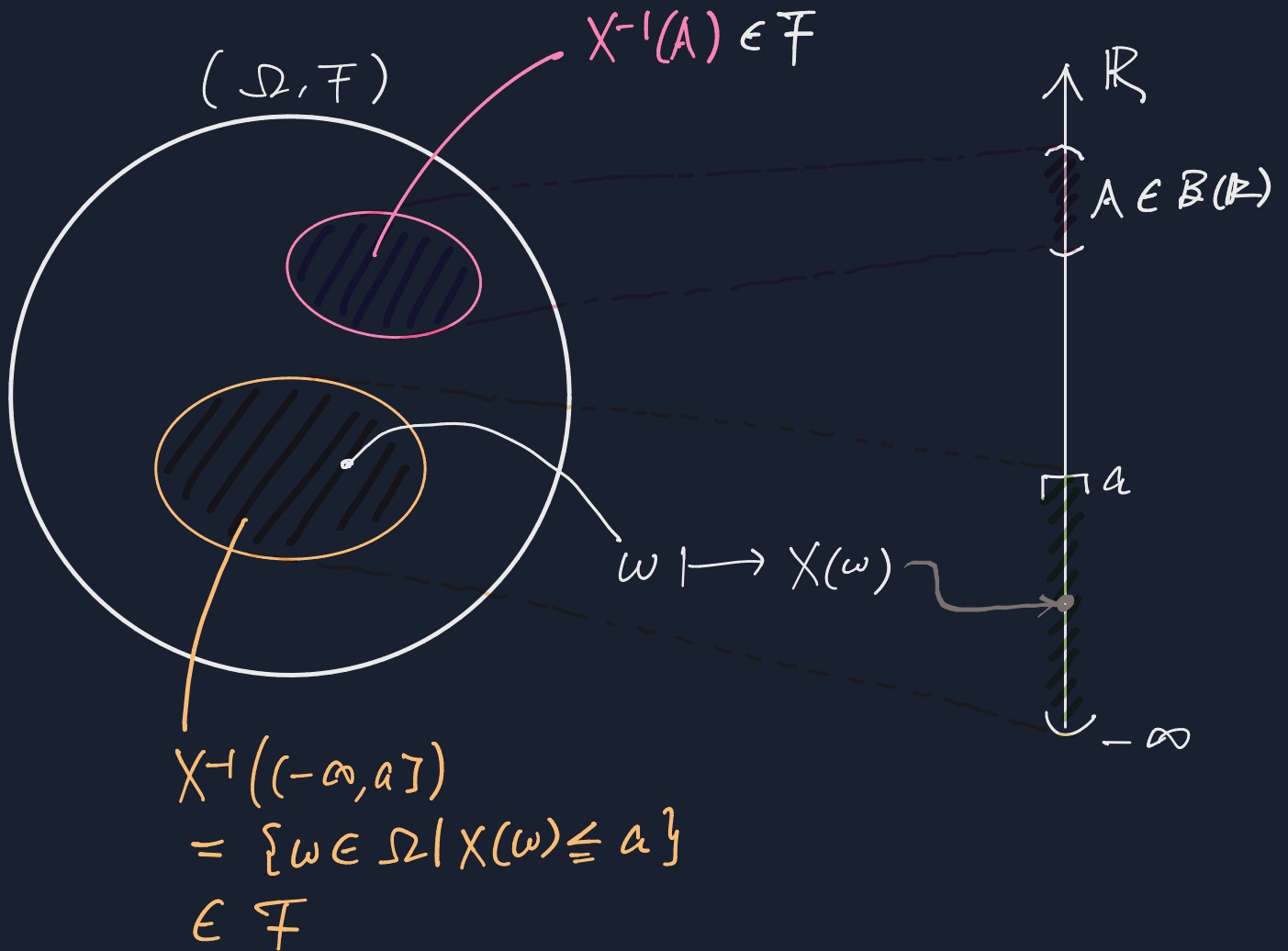
「 $X \leq x$ 2. 好確率は「測りたい欲し」」, 「 $X \in A$ ($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) 2. 好確率は測れる」

Ex. $\Omega = \{\text{金, 銀, 銅, 何れも}\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (全部集合)

← 確率変数

賞金: $X(\text{金}) = 1000$, $X(\text{銀}) = 100$, $X(\text{銅}) = 10$, $X(\text{何れも}) = 0$

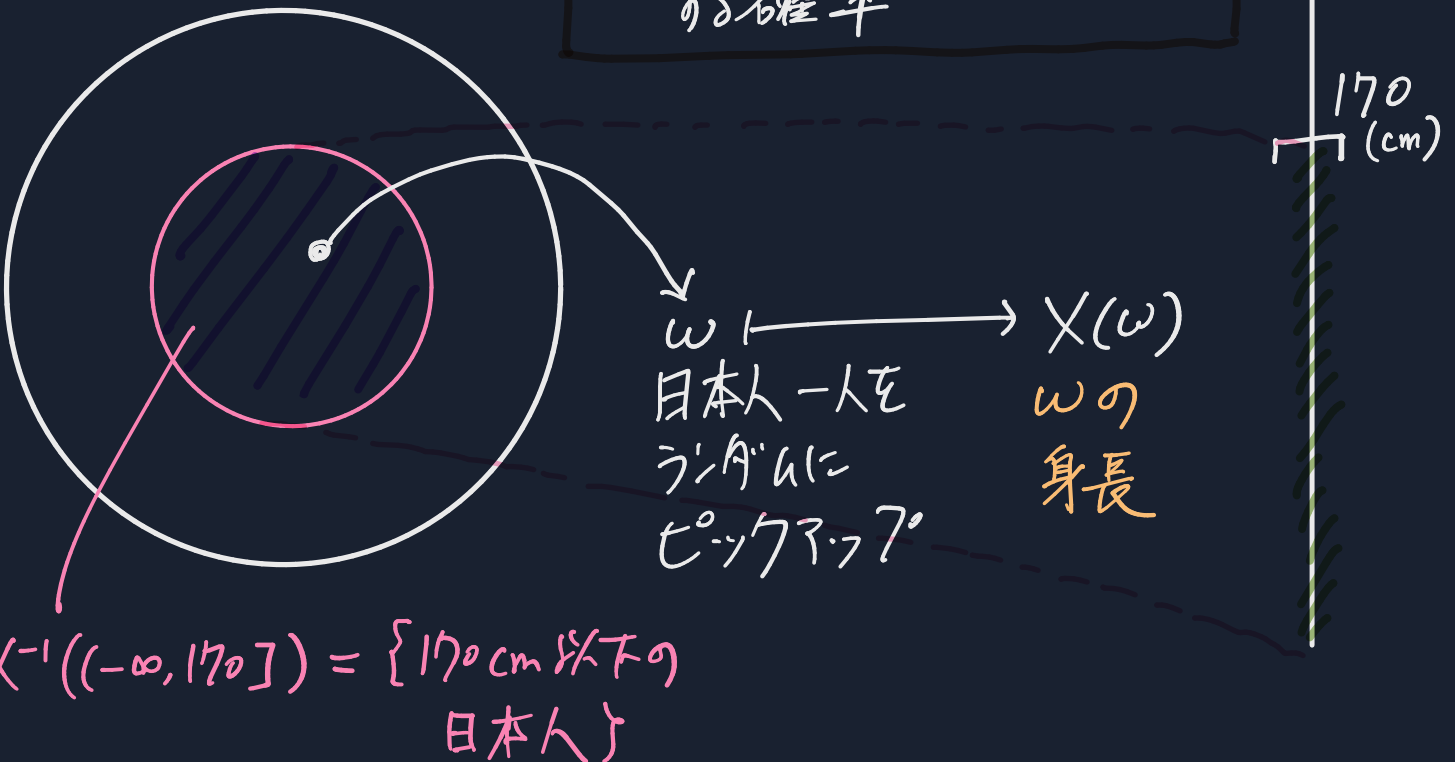
$P(\text{金}) = 0.1$, $P(\text{銀}) = 0.2$, $P(\text{銅}) = 0.3$, $P(\text{何れも}) = 0.4$



例]

$\Omega = \text{日本人全体}$

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 170) &= P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 170\}) \\
 &= 170 \text{ cm 以下の人をピックアップする確率}
 \end{aligned}$$



◦ $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し、 $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ であることを証明 (補足10-2)

$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ とおく (\mathcal{B}_0 は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の部分集合. 以下 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ と一致することを示した)

確率変数の定義より $(-\infty, a] \in \mathcal{B}_0$ ($\forall a \in \mathbb{R}$) である.

したがって \mathcal{B}_0 は σ -加法族であることを示す. 以下示す.

(1) $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{F}$ (\mathcal{F} の定義より) なるので $\mathbb{R} \in \mathcal{B}_0$.

(2) $A \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \Rightarrow (X^{-1}(A))^c \in \mathcal{F} \Rightarrow X^{-1}(A^c) \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}_0$.
(\mathcal{F} の定義)

(3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow X^{-1}(A_n) \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) \in \mathcal{F}$ ($\because \mathcal{F}$ は σ -加法族)
 $\Rightarrow X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathcal{F}$ ($\because \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n) = X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$)
 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_0$.
(\mathcal{F} の定義) 演習問題

以上より \mathcal{B}_0 は $\{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ を含む最小の σ -加法族を含む
 ことは $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ である (前回の演習問題を参照せよ). かつ

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_0$. 一方 定義より $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ なるので $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である //

◦ $X: \Omega \rightarrow \Omega'$

Ω' の部分集合族 \mathcal{B}' に対し、 $\sigma(\mathcal{B}')$ は \mathcal{B}' を含む最小の σ -加法族とする.

$\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{B}')$ なら

「 X が可測」 $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{B}'$ に対し $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ 」
(\mathcal{F}' ではない)

が成り立つ.

(\mathcal{B}' は \mathcal{F}' を "生成" する. X の \mathcal{F}/\mathcal{F}' -可測性を担保するには \mathcal{B}' における可測性の外語句は十分) (演習問題参照)

◦ $X_1: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}'), X_2: (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow (\Omega'', \mathcal{F}'')$ (可測関数)

に対し

$X_3 = X_2 \circ X_1: \omega \in \Omega \mapsto X_2(X_1(\omega)) \in \Omega''$ は $\mathcal{F}/\mathcal{F}''$ -可測.

Lem

$(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ のとき、 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が連続なら

X は可測

(Proof) $X^{-1}((a, \infty))$ は開集合なので (X の連続性より)

$X^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。よって $X^{-1}((-\infty, a]) = (X^{-1}((a, \infty)))^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。

Def (分布関数) **重要**

$X: r.v.$ \longleftrightarrow random variable の略

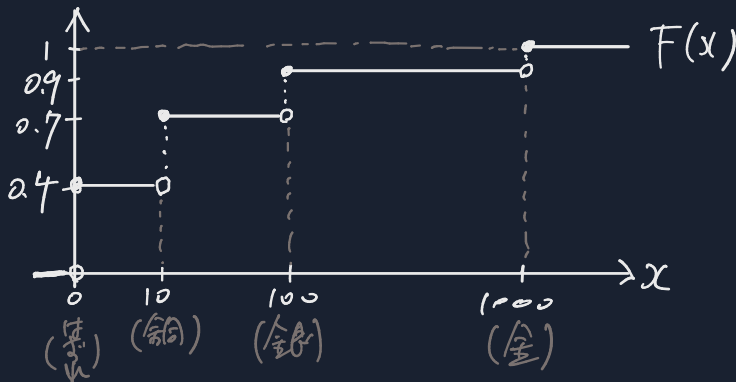
$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

とすると、 F を X の (累積)分布関数 と言う。

(cumulative distribution function, c.d.f.)

$F(x) = P(X \leq x)$ も、 $F(x) = P(\{X(\omega) \leq x\})$ と表すことができる。

次のように例示:



\uparrow F が定義されるためには、 $\{X \leq x\}$ が可測である必要がある。
 X が r.v. ならば、その可測性が担保される。

Thm (分布関数の性質)

(1) $x < y \implies F(x) \leq F(y)$ (単調非減少)

(2) $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = F(a)$ (右連続)

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

\times $\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a)$ とは限らな^い。
しかし、左極限は存在する。

$$P(X=a) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$$

と表す。

(Proof)

- (1) $A = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$, $B = \{\omega \mid X(\omega) \leq y\}$ とおくと.
 $x \leq y$ より $A \subset B$ である.
 確率の単調性より $P(A) \leq P(B)$ である.

- (2) $x_1 > x_2 > \dots \rightarrow a$ なる $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ である数列を
 考へる. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{X(\omega) \leq x_n\}}_{A_n \text{ とする}} = \underbrace{\{X(\omega) \leq a\}}_A$ には注意すると.

確率の連続性より.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A) = F(a)$$

である.

- (3) も同様.

これはすこしめんどい
 $C = \{X(\omega) > a\}$ なら.
 $\exists n$ なる $X(\omega) > x_n$ とするのよ.
 その ω は $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X(\omega) \leq x_n\}$
 に入らなう.

Remark

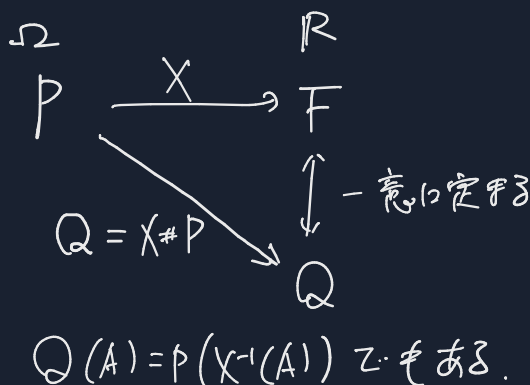
逆に (1)~(3) を満たす $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在したら.

対応する $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 Q が一意に存在する.

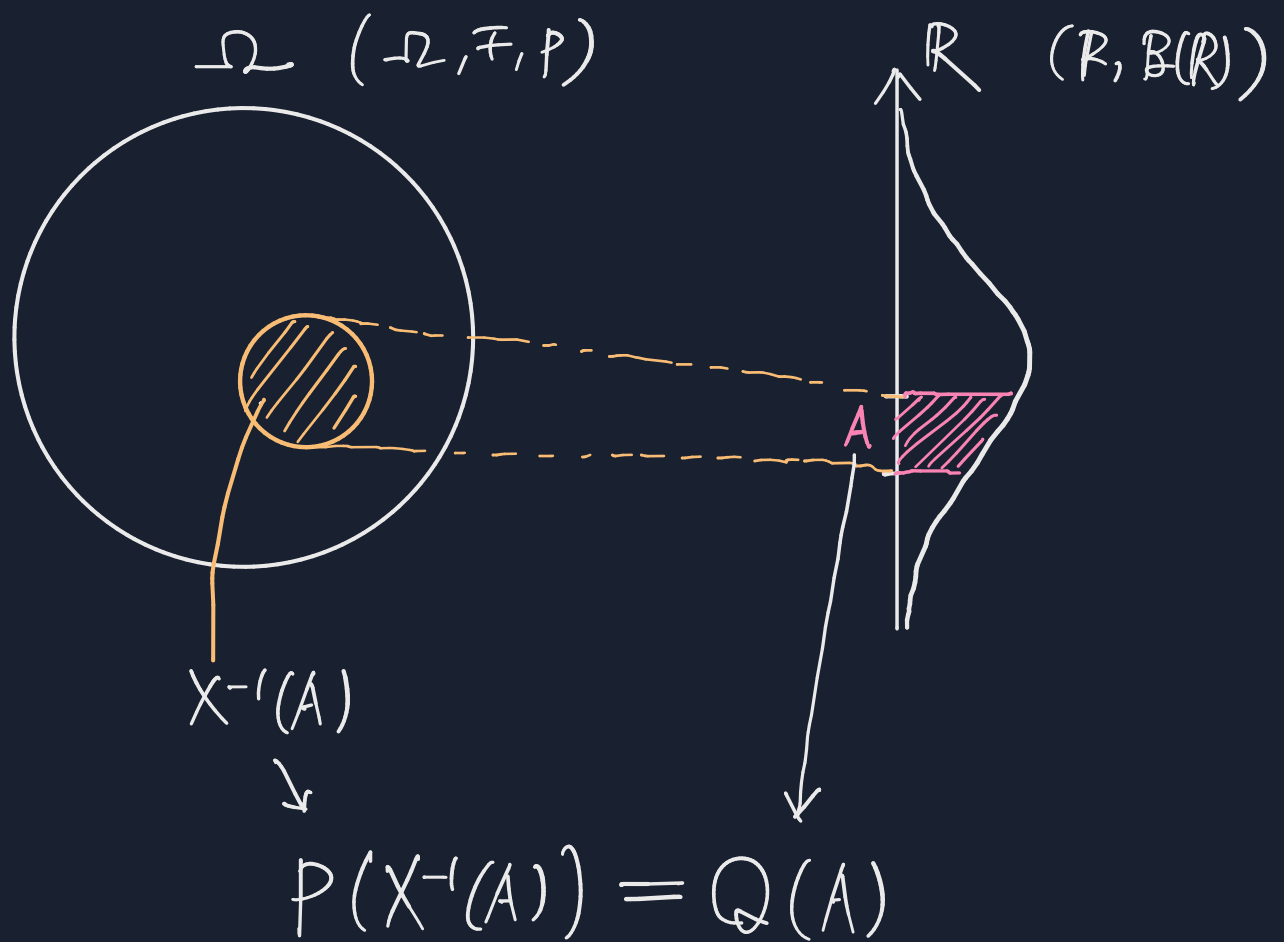
この Q は $Q((-\infty, a]) = F(a)$ ($\forall a \in \mathbb{R}$), $Q((a, b]) = F(b) - F(a)$
 を満たす. ($\forall a < b$)

$$\begin{array}{ccc} Q & \longleftrightarrow & F \\ \text{(測度)} & & \text{(分布)} \end{array}$$

P を言い換へる代わりに F を調へる方が楽なことが多い. (弱収束など)



$Q(A) = P(X^{-1}(A)) = P(X \in A)$
 である. 二つを
 P の X による push-forward と
 言う.
 $Q = X\#P$ と書く.

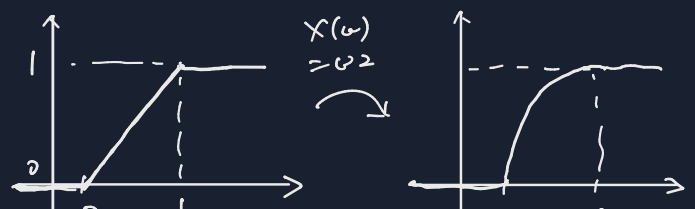
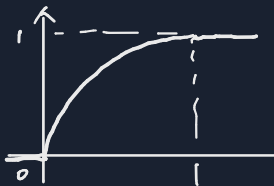


例: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$, P : Ω 上の一様分布

$X(\omega) = \omega^2$ とき $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega^2 \leq x\}$

$= \{0 \leq \omega \leq \sqrt{x}\}$ (for $0 \leq x \leq 1$)

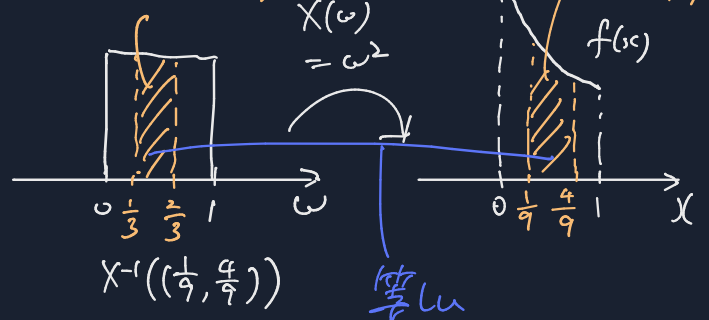
$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \sqrt{x} & (0 < x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$



$P(\{0 \leq \omega \leq \sqrt{x}\}) = \sqrt{x}$

$P(X^{-1}((\frac{1}{9}, \frac{4}{9})) = P(X \in (\frac{1}{9}, \frac{4}{9}))$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & (0 < x \leq 1) \\ 0 & (x \leq 0 \text{ or } x > 1) \end{cases}$$



確率分布の種類

- 連続

- 絶対連続
- 特異連続

- 離散

Def (連続分布)

$\forall x \in \mathbb{R}$ におう $F(x)$ が連続. かつ $P(X=x) = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$).



$(X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ の連続性とは関係なく $u = u$ に注意)

反例を作ってみよ.

Def (絶対連続分布)

(Borel 可測)

F が連続で, ある非負関数 f を用いて

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

と書けるとき, その分布は絶対連続であるという.

f を確率密度関数 (probability density function, p.d.f.) とする.

($A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し, $P(X \in A) = \int_A f(x) dx$ が成り立つ.)

絶対連続な連続分布.

Thm (Radon-Nikodym の定理)

μ を \mathbb{R} 上の測度とする.

$\mu(E) = 0$ を満たす任意の $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ におう $P(E) = 0$ である.

$\Leftrightarrow F$ は絶対連続

//

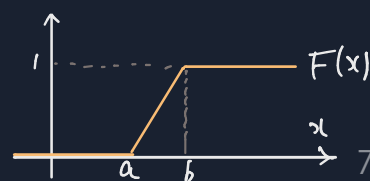
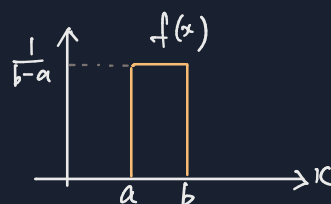
こちらを定義としておく.

Ex. (一様分布)

区間 $[a, b]$, $\nu_{[a, b]}$: $[a, b]$ 上の一様分布

$$\text{p.d.f. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (x \in [a, b]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$\text{c.d.f. } F(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{x-a}{b-a} & (x \in [a, b]) \\ 1 & (x > b) \end{cases}$$



Ex. (正規分布) ← 「からす分布」とも言う

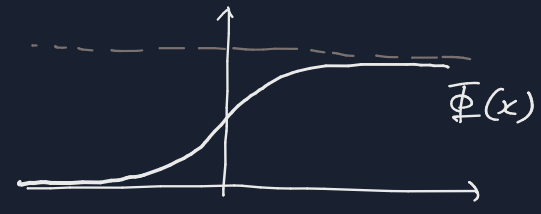
平均 $\mu \in \mathbb{R}$, 分散 $\sigma^2 > 0$

p.d.f. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

← 寛い

$N(\mu, \sigma^2)$ と表す.

$N(0, 1)$ を 標準正規分布 と言う.



c.d.f. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ を 誤差関数 と言う.
(error function)

Def (特異連続分布) ← (今は寛くないとも言う)

F は連続であり、かつある $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対し

$P(X \in E) = 1$ かつ $\mu(E) = 0$ (ルビ-グ測度)

が成り立つ時、特異連続 であると言う.

← 連続分布だが、密度関数をもたない!

Ex.

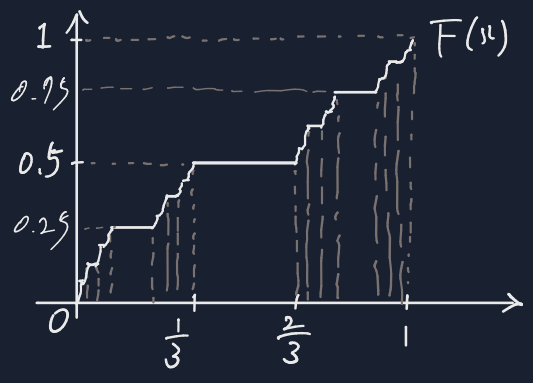
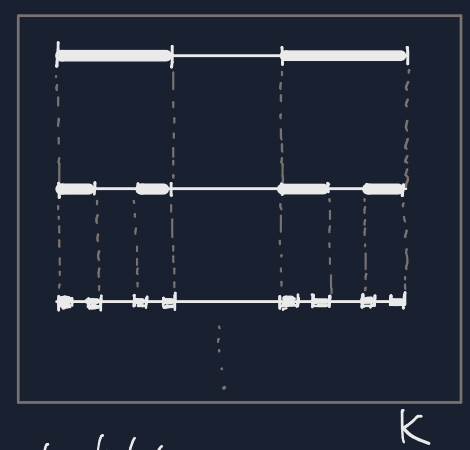
$\Omega = [0, 1), \mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1))$,

P は $[0, 1)$ 上の一様分布とする.

$X: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n}$ なる二進数展開を用いて

$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^n}$ とする.



かつ K に対し、

$P(X \in K) = 1$

一方、

$\mu(K) = 0$ (K は非可算濃度だが、ルビ-グ測度 = 0) である.

$(\mu(K) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \dots = 0)$

(注: K は K 集合: 集合 $[0, 1]$ を 3 等分して、
集合の中の領域を取り除くという
操作を無限的に繰り返して得られる集合.)

Def (離散分布)

X の取りうる範囲が高々可算個.

つまり、ある $V = \{v_1, v_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ が存在して、(有限個でもいい)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=v_k) = 1$$

が成立すると、離散分布 と言う。

$$f(v_k) = P(X=v_k)$$

のこを、確率質量関数 と言う。

(probability mass function, p.m.f.) //

分布関数は $F(x) = \sum_{k: v_k \leq x} f(v_k)$ と与えられる。

Ex. (Bernoulli分布)

$$V = \{0, 1\}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

p.m.f. $f(1) = \theta, \quad f(0) = 1 - \theta$

$\text{Ber}(\theta)$ と記す。

← この投げで 10

表: 1

裏: 0

Ex. (二項分布)

$$V = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$0 \leq \theta \leq 1.$$

p.m.f. $f(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$

$B(n, \theta)$ と記す。

← n 回のこの投げで
表が出た回数 k の
分布。

Ex. (Poisson分布)

$$V = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \lambda > 0$$

p.m.f. $f(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

⊆ 稀に起こる現象が一定期間内に起きる回数の分布:

- 工場で1日に生産される不良品の数
- 宇宙線が1時間に観測される回数

(補足)

Thm (ルバークの分解定理)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P は

絶対連続な分布 P_1 , 特異連続な分布 P_2 , 離散分布 P_3
に分解できる. すなわち, $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1$, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1$
である $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を用いて.

$$P = \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \theta_3 P_3$$

に分解でき, さらにこの分解は一意である.

