

演習問題

(1) $\mathcal{A} = \{ (-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n] \mid a_k \in \mathbb{R} \}$

$\mathcal{C} \subset \mathcal{Z}$. $\sigma(\mathcal{A})$ は $\{ (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \mid -\infty \leq a_k \leq b_k \leq \infty \}$

に含まれることを示せ.

(2) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を示せ.

(3) $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$: Ω における非空な集合族

(1) \mathcal{A}_k は π -システム

(2) $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ は独立.

$\implies \sigma(\mathcal{A}_1), \dots, \sigma(\mathcal{A}_n)$ は独立.

を示せ.

(4) $f = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ が可測ならば, X_1, \dots, X_n が r.v. のとき,

$f(X_1, \dots, X_n)$ が r.v. になることを示せ.

(5) X_1, \dots, X_n が r.v. のとき, $X_1 + \dots + X_n$ が r.v. になることを示せ.

(6) ある分布関数 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad ((x_1, x_2) \in [0, 1]^2)$$

をみたす時, 対応する確率測度 P について,

$$P(\{(x_1, x_2) \in [0, 1]^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\})$$

を求めよ.

(7) (Ω, \mathcal{F}) : 可測空間, X_1, X_2, \dots は (Ω, \mathcal{F}) 上の有界な r.v. である.

(a) $\sup_n X_n, \inf_n X_n$ は \mathcal{C} 上の r.v. であることを示せ.

(b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ が r.v. であることを示せ.

(c) $\forall \omega \in \Omega$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega)$ が存在する.

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ は r.v. であることを示せ.

(9) $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ を確率ベクトルとす。

$\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $\exists k \in \mathbb{R}$ で、 $P(\max_k |X_k| \geq k) \leq \varepsilon$ であることを示せ。
($0 \leq k < \infty$)

(10) 連続な分布関数 F は 一様に連続 であることを示せ。

(11) 共通の連続な分布関数 F を持つ2つの独立な r.v. X_1, X_2 を考える。 $P(X_1 = X_2) = 0$ を示せ。 (少し難)

(12) X_1, X_2 は独立な r.v. であり、同じ分布関数を持つ。

このとき、 $X = (X_1, X_2)$ と $\bar{X} = (X_2, X_1)$ は同じ同時分布関数を持つことを示せ。

(13) $\Omega = \{1, \dots, r\}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in \{1, \dots, r\}, k=1, \dots, n\}$

Ω 上に一様分布 P を考える。このとき、 $X_k((x_1, \dots, x_n)) = x_k$ とす。

X_1, \dots, X_n は独立であることを示せ。

(14) 東京都の住人から1人1人にランダムにピックアップして、新型コロナウイルスに

陰性PCR検査を受けた。結果は陰性であった。その人が

実は感染している確率を見積もれ。

(正確な値は出せないのでも
各種統計量から"見積もる"
だけである。)