

確率数理工学4

期待値と特性関数

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間.

この空間上の r.v. X の 期待値 を定義する.

F : X の分布関数.

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (可測)

F が絶対連続 \vee 離散なら $\varphi(x)$ の期待値は φ, f が連続なら リーマン積分で良い.

$$E[\varphi(X)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx & (\text{絶対連続, } f \text{ は p.d.f.}) \\ \sum_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) P(X=x) & (\text{離散}) \end{cases}$$

ここで、以下のように積分を定義する.

- 任意の分布 μ を拡張する.
- 連続・離散と区別を気にしない.
- \mathbb{R}^d 以外の空間上でも積分を定義する.

そこで、以下のように積分を定義する.

($\varphi(X(\omega))$ も r.v. なので、ある r.v. X の期待値を定義すれば十分)

$E[X] = \int X(\omega) dP(\omega)$ の定義

$\int X(\omega) P(d\omega), \int X dP, \int X dF$ 等とも書く.

($dF = \frac{dF}{dx} \cdot dx = f(x) \cdot dx$ と解釈すれば、 $\int X dF$ の記法も納得できるであろう.)

注: 今、我々がここで使うのは和 $(\sum_{n=1}^{\infty} \dots)$ を使うことだけである.

しかし、この和の極限を積分と定義するのはなぜ?

↳ 次ページ

(1) $A \in \mathcal{F}$ に対し, A の 定義関数

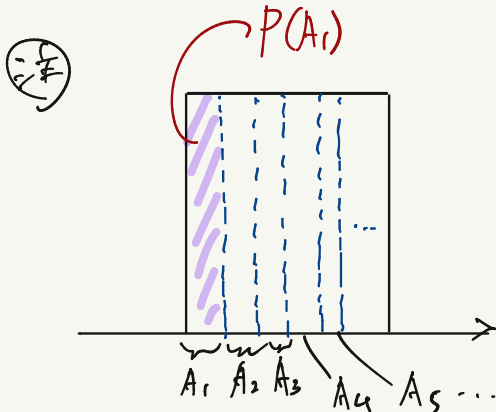
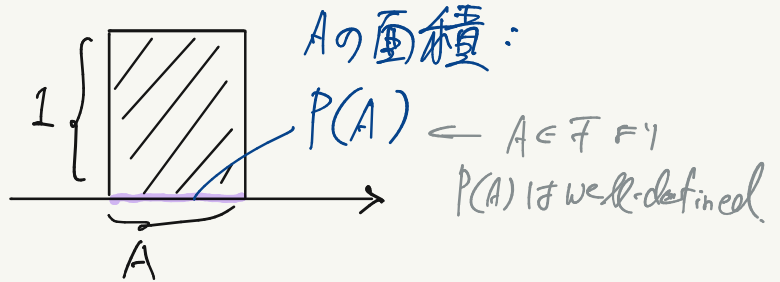
$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} A \in \mathcal{F} \text{ ならば} \\ \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} A & (x \geq 1) \\ \emptyset & (x < 1) \end{cases} \\ \Rightarrow X \text{ は可測関数} \end{array} \right]$$

のとき,

$$\underline{E[X] := P(A)}$$

とある.



$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$$

$$\Rightarrow E[X] = P(A)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (\sigma\text{-加法性})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{A_k}]$$

示す(た)い. 別の分割) $X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_k}$ とし $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{B_k}]$

$\Rightarrow X$ の表現のしぐたに
よらな

(2) X が 単関数 のとき. 例)

これはまた可測関数

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \quad (\text{有限和})$$

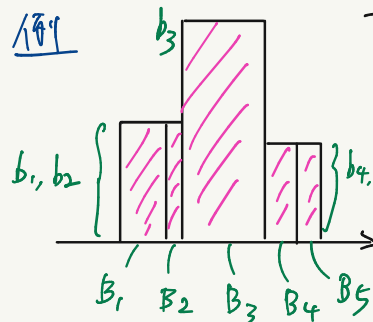
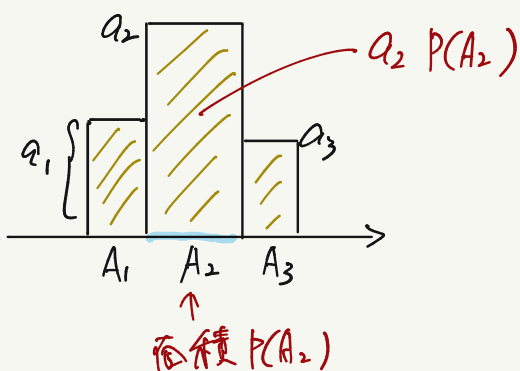
ただし, $a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $(A_i)_{i=1}^n$ は互いに素とすると. $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$

$$\underline{E[X] := \sum_{i=1}^n a_i P(A_i)}$$

$$\nearrow a_i \text{ と } E[X] = \sum_{j=1}^m b_j P(B_j)$$

とある. (1) の注のよう. これは単関数の表現のしぐたによらな.

\rightarrow 有限加法性を使う.
(演習問題)



$$X(\omega) = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$$

$$= \sum_{j=1}^5 b_j \mathbb{1}_{B_j}(\omega)$$

$$E[X] = \sum_{j=1}^5 b_j P(B_j) \text{ とある.}$$

(3) X が 非負 の確率変数の時

単関数の単調列 $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots \leq X(\omega)$ が存在し、

$$X(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega) \quad (X_n \nearrow X \text{ と書く})$$

とできることが知られる。

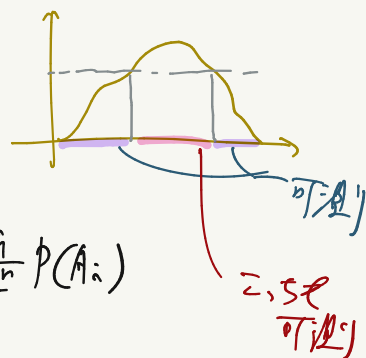
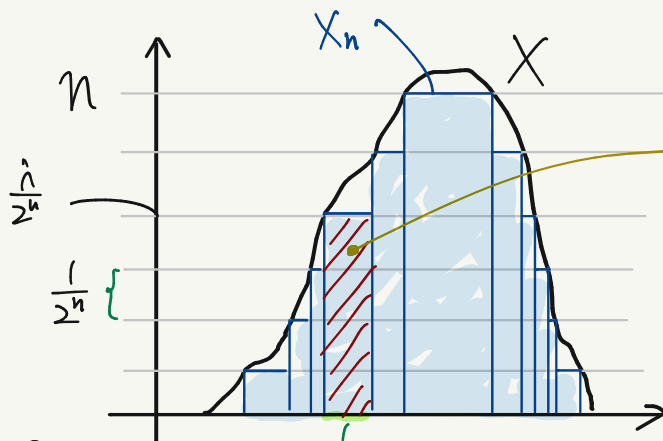
★ X の可測性は
 $\Rightarrow X_n$ は可測

($\{\omega | X(\omega) \leq \frac{i}{2^n}\}$ は可測)

たとえば、

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i}{2^n} & (\frac{i}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{i+1}{2^n}, i=0, \dots, n2^n-1) \\ n & (X(\omega) \geq n) \end{cases}$$

とすればよい。



このように $(X_n)_n$ を用いて

$$E[X] := \lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$$

$$(X_n = \sum_{j=0}^{n2^n-1} (\frac{j}{2^n}) \mathbb{1}_{\{\frac{j}{2^n} \leq X < \frac{j+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{X \geq n\}})$$

と定義する。これは 単関数の取り方 に依存しないことが知られる。

(5) 非負とは限らない X の時

$$X_+ = X \cdot \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}}, X_- = |X| \cdot \mathbb{1}_{\{X < 0\}}$$

とすればよい。

$$X = X_+ - X_- \quad (X_+, X_- \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上非負})$$

と分解し、

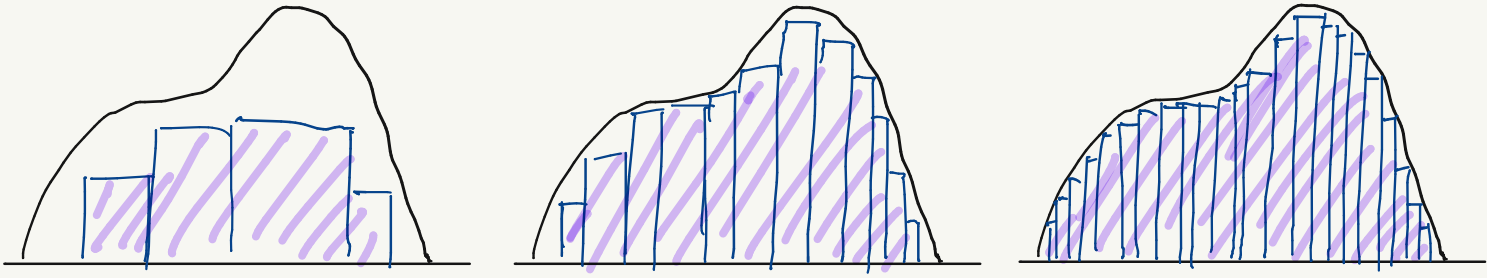
$$E[X] = E[X_+] - E[X_-]$$

とす。

$$E[X_+], E[X_-] < \infty \text{ のとき、可積分とす。}$$

※: 積分の定義にあたり $\Omega = \mathbb{R}^d$ とする仮定は使っていない。任意の空間で定義できる。

イメージ



単関数で領域を下方に埋めてゆく

X が単関数の列の極限で書けるかという所を
 X の可測性を用いる.

○ Xの平均値 : $\varphi(x) = x$, $\mu \stackrel{\text{def}}{=} E[X]$

○ Xのk次モーメント : $\varphi(x) = x^k$, $\mu_k \stackrel{\text{def}}{=} E[X^k]$ ← $= 2 - 4 -$

○ 平均値まわりのk次モーメント : $\varphi(x) = (x - \mu)^k$, $\nu_k \stackrel{\text{def}}{=} E[(X - \mu)^k]$

○ 分散 : $\varphi(x) = (x - \mu)^2$, $\text{Var}[X] \stackrel{\text{def}}{=} E[(X - \mu)^2]$
 $= E[X^2 - 2X\mu + \mu^2]$
 $= E[X^2] - E[X]^2$
 $(= \nu_2)$

Cor (期待値の性質)

(1) $Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ に対し.

$$E[Y] = \sum_{k=1}^n a_k E[X_k] \quad (\text{線形性})$$

(2) $X \leq Y$ (a.s.) なら ← a.s. は almost surely の意
 $P(X \leq Y) = 1$ くらい.

$$E[X] \leq E[Y] \quad (\text{単調性})$$

(3) $X \geq 0$ (a.s.) かつ.

$$E[X] = \int_{[0, \infty)} (1 - F(x)) dx$$

$$= \int_{[0, \infty)} P(X > x) dx$$

- $X \geq 0$ (a.s.) $d > 0$ に対し.

$$E[X^d] = d \int_{[0, \infty)} x^{d-1} P(X > x) dx$$

$$(\because) E[X] = \int_{[0, \infty)} x dF(x)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}[t < x] dt dF(x)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}[t < x] dF(x) dt \quad (\because \text{Fubini})$$

$$= \int_0^\infty P(t < X) dt$$

(2) と同様)

非負被積分関数
 なら順序交換
 可能



(4) (単調収束定理)

$X_n \nearrow X$ a.s. $0 \leq X_n \leq X$ (a.s.) なる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$$

(∞ を除く.)

(証明は後々 $n \rightarrow \infty$ と演習問題で)

X_n, X は単関数とは限らずに一般の確率変数

(5) (Fatouの補題)

$X_n \geq 0$ (a.s.) なる.

$$E[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[X_n]$$

(∞ を除く)

(6) (優収束定理)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad (\forall \omega \in \Omega) \quad \text{Z: 定数}$$

ある可積分な Z に対し $|X_n| \leq Z$ (a.s.) が成り立つ時.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = E[X]$$

// Z は必ずしも定数でなくても可積分な関数

* 優収束定理の反例.

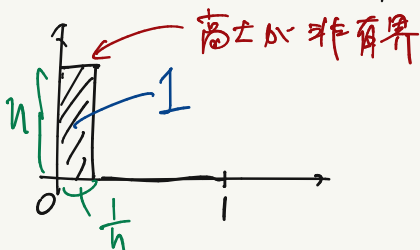
$\Omega = (0, 1], F = \mathcal{B}((0, 1]), P$: 一様分布.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & (0 < \omega \leq \frac{1}{n}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) = 0 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

(a.s.) $E[X_n] = 1, E[X] = 0$ $\therefore \lim E[X_n] \neq E[X]$.

= 4時. ある Z に対し $|X_n| \leq Z$ と Z が存在しない.



$$(7) X, Y \text{ が独立 } (X \perp Y) \Rightarrow E[XY] = E[X] E[Y]$$

(X, Y が単関数ならば確かめられる)

レム (分散の性質)

(1) X : r.v. に対して $Y = aX + b$ とおくと

$$\text{Var}[Y] = a^2 \text{Var}[X]$$

(2) X_1, X_2 : r.v., $\mu_1 = E[X_1], \mu_2 = E[X_2]$ ならば

$$\text{Var}[X_1 + X_2] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$$

(3) 互いに無相関な X_1, \dots, X_n に対して

$$\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \dots + \text{Var}[X_n]$$

(2) の再示:
$$\begin{aligned} \text{Var}[X_1 + X_2] &= E[(X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2))^2] \\ &= E[(X_1 - \mu_1)^2] + E[(X_2 - \mu_2)^2] \\ &\quad + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] \end{aligned}$$

• $E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$: 共分散 (Covariance)

$\text{Cov}(X_1, X_2)$ と書く.

• $R(X_1, X_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}[X_1]\text{Var}[X_2]}}$: 相関係数 (Correlation) $(-1 \leq R(X_1, X_2) \leq 1)$
2. 変数

$X_1 \perp X_2$ (独立) $\Rightarrow E[X_1 X_2] = E[X_1] E[X_2]$ (独立)

特(2).

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = 0 \quad (\text{独立成립存在})$$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \text{Var}[X_2] \end{pmatrix}$: 分散共分散行列

* 無相関 = $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$

Ex. (=二項分布の期待値と分散)

p.m.f. $f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \\ &= n\theta \sum_{x=1}^n \binom{n-1}{x-1} \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x} \\ &= n\theta \underbrace{\sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x-1}}_1 = n\theta \end{aligned}$$

$Var[X] = n\theta(1-\theta)$ ← 4ページ参照せよ.

一方 $X_i = \begin{cases} 1 & (\text{i} \text{ 個目のコイントスが表}) \\ 0 & (\text{i} \text{ 個目のコイントスが裏}) \end{cases}$

independent and identically distributed
(i.i.d.)
 $\begin{pmatrix} P(X_i=1) = \theta \\ P(X_i=0) = 1-\theta \end{pmatrix}$

$X = \sum_{i=1}^n X_i$ と表す.

Xは二項分布に従う

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n \theta = n\theta$$

$$\begin{aligned} Var[X] &= \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \sum_{i=1}^n \theta(1-\theta)^2 + (1-\theta)\theta^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \theta(1-\theta) = n\theta(1-\theta) \end{aligned}$$

⇒ 上の計算と一致



積分が well-defined であることの証明

例. 単関数列 X_n, Y_n がともに $X_n \nearrow X, Y_n \nearrow Y$ のとき.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n]$$

を示す. さもないと, $E[X]$ が単関数の取り方に依存し, well-defined にならない.

Lem

単関数 X, Y に対し.

(読者問題)

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y] \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Lem

単関数列 X_n , 単関数 X に対し, $X_n \nearrow X$ ならば

$$\lim_n E[X_n] = E[X]$$

証明

$$E[X] - E[X_n] = E[X - X_n] \neq 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X - X_n] = 0 \text{ を示せばよい.}$$

言ひかえれば, 非負の単関数列 X_n が, $X_n \searrow 0$ のとき.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = 0$$

($X_n \leftarrow X - X_n$
と代入)

を示せばよい.

今 $X_1(\omega) \geq X_2(\omega) \geq \dots \geq 0$ かつ, X_1 が単関数なので.

$$K = \sup_{\omega \in \Omega} X_1(\omega)$$

とすれば $K < \infty$ かつ, $\forall \omega \in \Omega, \forall n \geq 1, 0 \leq X_n(\omega) \leq K$ である.

$$\text{特(2)} \quad 0 \leq X_n = X_n \mathbb{1}_{\{X_n > \varepsilon\}} + X_n \mathbb{1}_{\{X_n \leq \varepsilon\}} \quad (\varepsilon > 0 \text{ は任意})$$

$$\leq \underbrace{K \mathbb{1}_{\{X_n > \varepsilon\}}}_{\substack{\uparrow \\ |X_n| \leq K \text{ 故}}} + \underbrace{\varepsilon \mathbb{1}_{\{X_n \leq \varepsilon\}}}_{\substack{\leftarrow \\ \text{二項展開}}} \quad (\text{二項展開})$$

両辺期待値をとる.

$$0 \leq E[X_n] \leq K P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon P(X_n \leq \varepsilon)$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{単調性}}}{\leq} K P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon \underbrace{P(X_n \leq \varepsilon)}_{\leq 1}$$

$\varepsilon > 0$ $X_n \downarrow 0$ かつ $A_n = \{X_n > \varepsilon\}$ とおくと $\varepsilon < \varepsilon$.

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ である.

$\leftarrow \varepsilon > \varepsilon$ だけ

よって確率の単調性より.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

よって.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \leq \varepsilon$$

(\because 任意の $\varepsilon > 0$)

$$E[X_n] \leq \underbrace{P(X_n > \varepsilon)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = 0$$

である.

$\lim E[X_n] = \lim E[Y_n]$ の証明

- $\lim E[X_n] \leq \lim E[Y_n]$ を示せばいい. X_n と Y_n の対称性より $\lim E[X_n] = \lim E[Y_n]$ を得る.

今 n を固定して.

$$Z_{n,m}(\omega) = \min(X_n(\omega), Y_m(\omega))$$

とおく. $Z_{n,m}$ は単関数である.

当然 $Z_{n,m} \leq Y_m$ (a.s.) である.

また. $\lim_m Y_m(\omega) = X(\omega) \geq X_n(\omega)$ ($\forall \omega$) かつ

$$Z_{n,m} \rightarrow X_n \quad (m \rightarrow \infty)$$

である. よって先の Lemma より.

$$E[X_n] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[Z_{n,m}] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} E[Y_m]$$

n は任意なので. $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] \leq \lim_{m \rightarrow \infty} E[Y_m]$

単調収束定理の言正明 (参考)

積分の定義より

各 X_n に対して単関数列 $Y_m^{(n)}$ が存在して

$$E[X_n] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[Y_m^{(n)}], \quad Y_m^{(n)} \nearrow X_n$$

とある。このとき

$$Z_m(\omega) := \max_{n \leq m} Y_m^{(n)}(\omega)$$

とすると、 Z_m は単関数である。 $Z_1 \leq Z_2 \leq Z_3 \leq \dots$ とある。
この $(Z_m)_m$ は X に漸近する単関数列であることを示す。

今、 $n \leq m$ とする。

$$Y_m^{(n)} \leq \max_{n \leq m} Y_m^{(n)} = Z_m \leq \max_{n \leq m} X_n \leq X_m$$

$Y_m^{(n)} \leq X_n$ かつ X_m は単関数

つまり

$$Y_m^{(n)} \leq Z_m \leq X_m \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

とある。両辺 m を ∞ まで \lim とすると

$$X_n = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m^{(n)} \leq \lim_m Z_m \leq \lim_m X_m = X$$

$\lim_m X_m = X$ は仮定

とあり、左辺の n の極限 \lim とすると

$$X = \lim_n X_n \leq \lim_m Z_m \leq X$$

$E[X]$ の定義!

とあり、 $Z_m \nearrow X$ を示せば、つまり $E[X] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[Z_m]$ とある。

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} E[X_n] = \lim_{m \rightarrow \infty} E[Z_m] (= E[X])$ を示せば十分

①より

$$\begin{aligned} E[X_n] &= \lim_m E[Y_m^{(n)}] \\ &\leq \lim_m E[Z_m] \quad (\because \textcircled{1}) \\ &\leq \lim_m E[X_m] \end{aligned}$$

$$\text{よって } E[X_n] \leq \lim_m E[Z_m] (= E[X]) \leq \lim_n E[X_n]$$

左辺の \lim とすれば $\lim_n E[X_n] \leq E[X] \leq \lim_n E[X_n]$

$$\text{つまり } \lim E[X_n] = E[X]$$

