

確率数理工学6

④ 特性関数の性質

Thm (分布関数と特性関数の関係) ⑤ 重要

2つの分布関数 F_1, F_2 に対し、

その特性関数を ϕ_1, ϕ_2 とする。

$$F_1 \text{ と } F_2 \text{ が等しい } (F_1(x) = F_2(x) \ (\forall x \in \mathbb{R}))$$

$$\Leftrightarrow \phi_1 \text{ と } \phi_2 \text{ が等しい } (\phi_1(t) = \phi_2(t) \ (\forall t \in \mathbb{R})) //$$

(\Rightarrow は自明, \Leftarrow は非自明)

★ 分布の等しさを、ある関数クラスの期待値の等しさに変換する。

$$\int e^{itx} dF_1(x) = \int e^{itx} dF_2(x) \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

⇔ かつ、全2つのモーメントが等しいならば、分布が等しいこともわかる。

$$(c.f. \mathbb{R}^d \text{ 上の } x \text{ と } x' \text{ が等しい} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle \ (\forall y \in \mathbb{R}^d))$$

より強く以下のことが言える。

Thm (Lévyの反転公式)

$$\begin{aligned} & P(X \in (a, b)) + \frac{1}{2} (P(X=a) + P(X=b)) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi} \phi(\xi) d\xi // \end{aligned}$$

(c.f. フーリエ逆変換. $P(X \in (a, b))$ が $b > a$ であることが保証される。両辺 $b > a$ であることが保証される)

先の定理を Lévy の反転公式を用いて示す。

⇐ を示す。

a, b が F の連続点なら、 $P(X=a) = P(X=b) = 0$ である。

$$F(b) - F(a) = P(X \in (a, b))$$

となる。よって、 $\phi_1 = \phi_2$ なら、 F_1 と F_2 が同時に連続

である点 $x, x' \in \mathbb{R}$ において

$$F_1(x) - F_1(x') = F_2(x) - F_2(x')$$

である。さらに、不連続点は高々可算個なので、 x' は x よりも

大きくとる。 $x' \rightarrow -\infty$ とすれば、分布関数の性質より

$$F_1(x) = F_2(x) \quad (x \text{ は } F_1, F_2 \text{ の連続点})$$

を得る。

次に任意の $x \in \mathbb{R}$ (不連続点でもよい) を固定すると、

$\forall \eta > 0$ である $|x - x_n| \leq \frac{1}{n}$ かつ $x \leq x_n$ である x_n が F_1 と F_2

から連続であるような点 x_n が存在する。つまり

$$F_1(x_n) = F_2(x_n) \quad \text{と} \quad \text{である。}$$

すると、 F_1 と F_2 の右連続性が成り立つ。

$$F_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_2(x_n) = F_2(x)$$

↑
右連続性

↑
右連続性

を得る。



Lévyの反転公式の証明

Rを止めたときの右辺の積分

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \left(\frac{e^{-i\zeta b} - e^{-i\zeta a}}{-i\zeta} \right) \left(\int e^{i\zeta x} dF(x) \right) d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dF(x) \left(\int_{-R}^R \frac{e^{-i\zeta(b-x)} - e^{-i\zeta(a-x)}}{-i\zeta} d\zeta \right) \quad (\text{Fubini}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dF(x) \int_{-R}^R \left\{ \frac{\cos(\zeta(x-b)) - \cos(\zeta(x-a))}{-i\zeta} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin(\zeta(x-b)) - \sin(\zeta(x-a))}{\zeta} \right\} d\zeta
 \end{aligned}$$

(注: $\frac{\cos(\zeta(x-b)) - \cos(\zeta(x-a))}{\zeta}$, $\frac{\sin(\zeta(x-b)) - \sin(\zeta(x-a))}{\zeta}$ は $\zeta \in \mathbb{R}$ に有界)

$\zeta \rightarrow 0$ のとき \rightarrow $(x-b)\sin(\zeta(x-b)) - (x-a)\sin(\zeta(x-a))$ に収束 (ローランド)

∴ $\frac{\cos(\zeta(x-b)) - \cos(\zeta(x-a))}{\zeta}$ は奇関数なので積分は0

∴ $f_R(x) = \int_0^R \frac{\sin(\zeta x)}{\zeta} d\zeta \quad (x \in \mathbb{R})$ とする。

右辺 = $\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int dF(x) (f_R(x-a) - f_R(x-b))$

∴ $\lim_{R \rightarrow \infty} f_R(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\sin(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{\pi}{2} & (x > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

∴ $\frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int f_R(x-a) - f_R(x-b) dF(x)$

= $\frac{1}{\pi} \int \lim_{R \rightarrow \infty} (f_R(x-a) - f_R(x-b)) dF(x)$ (優収束定理)
積分の中身は有界

= $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int (\mathbb{1}\{x > a\} - \mathbb{1}\{x < a\}) - (\mathbb{1}\{x > b\} - \mathbb{1}\{x < b\}) dF(x)$

= $\frac{1}{2} \int (2 \mathbb{1}\{a < x < b\} + \mathbb{1}\{x = a\} + \mathbb{1}\{x = b\}) dF(x)$

$$= \int \mathbb{1}\{a < x < b\} dF(x) + \frac{1}{2} \int \mathbb{1}\{x=a\} dF(x) + \frac{1}{2} \int \mathbb{1}\{x=b\} dF(x)$$

$$= P(a < X < b) + \frac{1}{2} (P(X=a) + P(X=b))$$

↑ 定義関数の期待値.

⊙ 分布の性質を調べる代わりに、特性関数の性質を調べれば良い.

Thm (独立な確率変数の和の特性関数) ⊙ 重要!

X_1, \dots, X_n : 互いに独立な r.v.

$\phi_j(t)$: X_j の特性関数 ($j=1, 2, \dots, n$)

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

S_n の特性関数は

$$\phi(t) = \phi_1(t) \cdot \phi_2(t) \cdot \dots \cdot \phi_n(t)$$

と表わす.

(和の特性関数は、特性関数の積)

Proof

$$\phi(t) = E[e^{it(X_1 + \dots + X_n)}] = E[e^{itX_1} \dots e^{itX_n}]$$

$$= \prod_{i=1}^n E[e^{itX_i}] = \phi_1(t) \times \dots \times \phi_n(t)$$

↑ 独立性

Thm (独立性と特性関数) ⊙ 特性関数と分布の 1対1対応

X_1, \dots, X_n : r.v.

同時分布の特性関数: $\phi(t_1, \dots, t_n) \stackrel{\text{def}}{=} E[e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}]$

ϕ_j : X_j の c.f. (特性関数)

$$X_1, \dots, X_n \text{ が独立} \iff \phi(t_1, \dots, t_n) = \phi_1(t_1) \dots \phi_n(t_n)$$

例

Ex. (二項分布)

$X_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ ($P(X_i=1)=\theta, P(X_i=0)=1-\theta$)
(i.i.d.)

$S = X_1 + \dots + X_n$ とおす.

X_i の特性関数: $\theta e^{it} + (1-\theta)$

S の " : $(\theta e^{it} + (1-\theta))^n$

← 前回の講義

→ 二項分布の特性関数

⇒ $S \sim B(n, \theta)$ (二項分布)

Ex. (正規分布の和の分布)

X_1, \dots, X_n : r.v., 独立

$X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

← S_n の c.f. ← X_j の c.f.
 $\phi(t) = \prod_{j=1}^n \phi_j(t)$

$$= \prod_{j=1}^n \exp(it\mu_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2 t^2)$$

$$= \exp(it\bar{\mu} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 t^2)$$

ただし, $\bar{\mu} = \mu_1 + \dots + \mu_n, \bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$

よって, $S_n \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$: 正規分布の再生性

→ 和の分布がすぐに求まる.

様々な分布

連続な分布

指数分布 ($Ex(\lambda)$)

$$\text{p.d.f. } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

($\lambda > 0$: 1秒に λ 回)

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda x}$$

~ 単位時間にはある事象が平均 λ 回発生
すると、その事象の発生間隔の分布
(ポアソン分布と関係)

$$\begin{aligned} \text{特性関数 } \phi(t) &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{i\lambda x t} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} \end{aligned}$$

モーメント母関数

$$\psi(t) = \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right) = -\ln \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)$$

$$\psi'(t) = \left(\frac{it}{\lambda} \right) \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)^{-1}$$

$$\psi''(t) = \left(\frac{it}{\lambda} \right)^2 \left(1 - \frac{it}{\lambda} \right)^{-2}$$

$$\begin{cases} \psi'(0) = \frac{it}{\lambda} \longrightarrow k_1 = \frac{1}{\lambda} = \mu & (\text{平均}) \\ \psi''(0) = \left(\frac{it}{\lambda} \right)^2 \longrightarrow k_2 = \frac{1}{\lambda^2} & (\text{分散}) \\ \psi^{(3)}(0) = 2 \left(\frac{it}{\lambda} \right)^3 \longrightarrow k_3 = \frac{2}{\lambda^3} \\ \psi^{(4)}(0) = 3! \left(\frac{it}{\lambda} \right)^4 \longrightarrow k_4 = \frac{6}{\lambda^4} \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 = 6 \end{cases}$$

($\lambda = \text{Eisrate}$)

ガンマ分布 ($G(\lambda, k)$)

p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

Note $\Gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$: ガンマ関数

$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$

n が自然数のとき. $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

特性関数

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} e^{i t x} dx \\ &= \frac{\lambda^k}{(\lambda - i t)^k} \cdot \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty ((\lambda - i t)x)^{k-1} e^{-(\lambda - i t)x} (\lambda - i t) dx \\ &= \frac{\lambda^k}{(\lambda - i t)^k} = \left(1 - \frac{i t}{\lambda}\right)^{-k} \end{aligned}$$

$X_j \sim \text{Exp}(\lambda)$ ($j=1, \dots, k$) 互いに独立. とおくと

$S_k = X_1 + \dots + X_k$ の c.f. は

$\phi(t) = \left(1 - \frac{i t}{\lambda}\right)^{-k}$: ガンマ分布の特性関数
 $G(\lambda, k)$

→ 単位時間あたり平均 λ 回発生する事象が

k 回起きるまでの時間 (指数分布の和はガンマ分布)

モーメント母関数 $\psi(t) = -k \ln\left(1 - \frac{i t}{\lambda}\right)$

$k_1 = \frac{k}{\lambda}$

$k_3 = \frac{2k}{\lambda^3}$

$k_2 = \frac{k}{\lambda^2}$

$k_4 = \frac{6k}{\lambda^4}$

$\beta_1 = \frac{2}{k}$

$\beta_2 = \frac{6}{k}$

$k \rightarrow \infty$ とき

$\beta_1 \rightarrow 0, \beta_2 \rightarrow 0$

(正規分布に近づく)

$\frac{X - \frac{k}{\lambda}}{\sqrt{k/\lambda^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$

- χ^2 分布 (カイ二乗分布)

$G(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$ を自由度 n の χ^2 -分布 と書く。

統計書によく現れる。

使い所: (正規分布と χ^2 分布の関係)

$X \sim N(0, 1)$: 標準正規分布

$Y = X^2$ の分布は $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に従う

--- 自由度1の χ^2 分布

$X_j \sim N(0, 1)$ ($j=1, \dots, k$) (i.i.d.) なら

$Y = X_1^2 + \dots + X_k^2$ は $G(\frac{1}{2}, \frac{k}{2})$ に従う。

--- 自由度 k の χ^2 分布

(Proof) • $k=1$ のとき. $X \sim N(0, 1)$ なら. 標準正規分布の p.d.f.

$$F(y) = P(X^2 \leq y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} p(x) dx = 2 \int_0^{\sqrt{y}} p(x) dx$$

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{d}{dy} F(y) = \frac{d}{dy} \left(2 \int_0^{\sqrt{y}} p(x) dx \right) \quad \frac{\frac{1}{2}}{P(\frac{1}{2})} \\ &= \frac{d\sqrt{y}}{dy} \cdot 2 p(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{1}{2}y} \\ &= \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{P(\frac{1}{2})} \cdot y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

→ $G(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の p.d.f.

• $k > 1$ のとき.

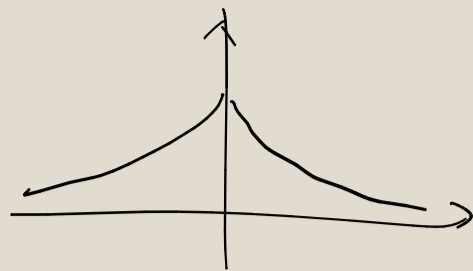
$Y = X_1^2 + \dots + X_k^2$ の特性関数:

$$\phi(t) = \left[(1 - 2it)^{-\frac{1}{2}} \right]^k = (1 - 2it)^{-\frac{k}{2}}$$

⇒ $G(\frac{1}{2}, \frac{k}{2})$ の特性関数: 自由度 k の χ^2 分布

- Cauchy 分布 (コシキ分布)

p.d.f. $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}$



$$E[|x|] = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{a^2+x^2} dx$$
$$= \frac{2a}{2\pi} \left[\ln(a^2+x^2) \right]_0^{\infty}$$

→ 有限に確定しない

$E[X]$ は存在しない (非可積分)

C.f. : $\phi(t) = \exp(-a|t|)$

- Γ -分布 ($Be(a,b)$)

p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

a, b は Γ -分布 (形状母数)

Note $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \Gamma$ -関数

平均: $\mu = \frac{a}{a+b}$

分散: $\sigma^2 = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

実は $X \sim G(a,1), Y \sim G(b,1) \Rightarrow \frac{X}{X+Y} \sim Be(a,b)$
(独立)

⇒ 2個分布の事前分布に使われたりある。

○ 離散分布

- 二項分布 (省略)

- Poisson分布 ($P_0(\lambda)$)

$$\text{p.m.f. } f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$(x=0, 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$$

← $\sum_{x \rightarrow \infty} f(x)$

特性関数

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \underline{\underline{\exp(\lambda(e^{it} - 1))}}$$

モーメント母関数

$$\psi(t) = \ln \phi(t) = \lambda(e^{it} - 1)$$

$$\psi'(t) = i\lambda e^{it}$$

$$\psi''(t) = (i)^2 \lambda e^{it}$$

$$\psi^{(k)}(t) = (i)^k \lambda e^{it}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k_1 = \lambda \\ k_2 = \lambda \\ \vdots \\ k_k = \lambda \quad (\forall k) \end{cases}$$

$$\rightarrow \beta_1 = \frac{1}{i\lambda}, \beta_2 = \frac{1}{\lambda}$$

事象の発生間隔が指数分布に従うとき、

単位時間あたり発生する事象の数の分布

X_1, X_2, \dots : 独立な指数分布 ($E_x(\lambda)$)、客の到着間隔

客が k人以上来た: $X_1 + \dots + X_k \leq t$

つまり、 $Y \sim G(\lambda, k)$ と $Y \leq t$ 2. ある確率

事象の発生間隔が指数分布に従うとき、

単位時間あたりに発生する事象の数の分布

X_1, X_2, \dots : 独立な指数分布 ($E_r(\lambda)$)、客の到着間隔

客が k 人以上来た : $X_1 + \dots + X_k \leq t$

つまり、 $Y \sim G(\lambda, k)$ と $Y \leq t$ 2. ある確率

$$\int_0^t \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\lambda y} dy$$

$$= \int_0^t -\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} y^{k-1} \frac{d}{dy}(e^{-\lambda y}) dy$$

$$= \left[-\frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\lambda y} \right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda y} y^{k-2} dy$$

$$\vdots$$
$$- \frac{\lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda t}$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = 1 - \underbrace{F(k-1)}$$

Poisson分布の分布関数

$$\text{つまり } P(k \text{人以上}) = 1 - F(k-1)$$

$$\Rightarrow P(k-1 \text{人以下}) = F(k-1) : \text{Poisson分布}$$



負の二項分布 (NB(r, θ))

コイン投げを r 回、表が出るまでに裏が出る回数 (x) の分布
 (ただし、その 1 回前まで r 回裏 x 回、表 r-1 回と仮定)

r=1 のとき、NB(1, θ) = G(θ) = 幾何分布 と言う

一般のとき、p.m.f $f(x) = \binom{r+x-1}{r-1} \theta^{r-1} (1-\theta)^x \theta$
 $= \binom{r+x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^x$ ↑
最後 r 成功

特性関数

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \binom{r+x-1}{r-1} \theta^r (1-\theta)^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{r-1} \theta^r (e^{it(1-\theta)})^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{∴} \left(\frac{1}{1-z}\right)^r &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{r(r+1)\dots(r+x-1)}{x!} z^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{r-1} z^x \end{aligned}$$

F1. $\phi(t) = \theta^r (1 - e^{it(1-\theta)})^{-r}$ である。

$$\psi(t) = \ln(\phi(t)) = r \ln(\theta) - r \ln(1 - e^{it(1-\theta)})$$

$$\psi'(t) = -r \frac{-i(1-\theta)e^{it}}{1 - e^{it(1-\theta)}} \xrightarrow{t=0} \mu = r \frac{1-\theta}{\theta}$$

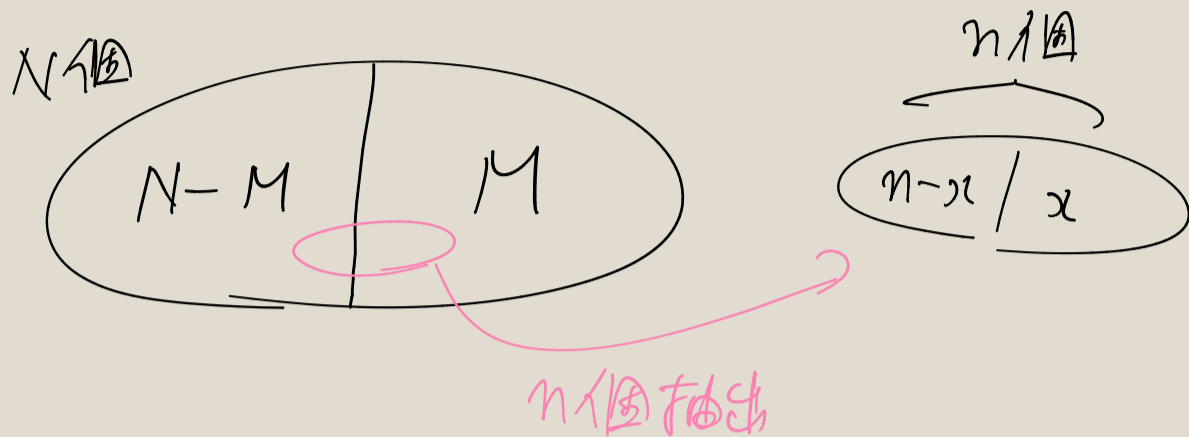
$$\psi''(t) = r \frac{i^2(1-\theta)e^{it}}{(1 - e^{it(1-\theta)})^2} \xrightarrow{t=0} \sigma^2 = r \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

(0 < θ < 1, θ ≠ 0)

例: 7-11 のような問題, コイン投げ

超幾何分布 $(H(n, N, M))$

N 個のアイテムに M 個の不良品が $\lambda, 2$ あり。 n 個を非復元抽出した時、その n 個に x 個の不良品が $\lambda, 2$ する確率



p.m.f.
$$f(x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$\theta = \frac{M}{N} \ll 2, N \rightarrow \infty$ とおくと、 θ は固定

$\rightarrow \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$ (二項分布)

$$f(x) = \frac{M(M-1)\dots(M-x+1)}{x!} \cdot \frac{(N-M)(N-M-1)\dots(N-M-n+x+1)}{(n-x)!}$$

$$\frac{N \dots (N-n+1)}{n!}$$

$$= \binom{n}{x} \frac{M}{N} \cdot \left(\frac{M}{N} - \frac{1}{N}\right) \dots \left(\frac{M}{N} - \frac{x-1}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(1 - \frac{M-1}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{M+n-x-1}{N}\right)$$

$$1 \times \left(1 - \frac{1}{N}\right)^x \dots \times \left(1 - \frac{n-1}{N}\right)$$

$\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{M \rightarrow \infty}$ $\binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$
 $\left(\frac{M}{N} = \theta\right)$

超幾何分布
 $H(n, N, M)$

$N \rightarrow \infty$
 $\theta = \frac{M}{N}$

Bernoulli分布

\updownarrow

二項分布
 $B(n, \theta)$

$n\theta = \lambda$
 $n \rightarrow \infty$
 $\theta \rightarrow 0$

(Poissonの
小数の法則)

Poisson分布
 $P_0(\lambda)$

負の二項分布
 $NB(k, \theta)$

$\downarrow k=1$

幾何分布
 $G(\theta)$

指数分布
 $Ex(\lambda)$

$\uparrow k=1$

ガンマ分布
 $G(\lambda, k)$

$\downarrow k = \frac{n}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$

χ^2 分布
 $\chi^2(n)$

正規分布
 $\sum_{i=1}^n X_i^2$
($X_i \sim N(0, 1)$)

連続