

演習問題

(1) X_1, \dots, X_n : 独立.

ψ_i : X_i のモーメント母関数

$S = X_1 + \dots + X_n$ のモーメント母関数は

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \dots + \psi_n(t)$$

であることを示せ.

このとき、 S の j 次モーメントは

$$k_j = k_j^{(1)} + \dots + k_j^{(n)}$$

($k_j^{(i)}$ は X_i の j 次モーメント)

であることを確かめよ.

(2) $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ が下半連続とは $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^d$)

を意味することを示せ. (同様に f が上半連続 $\Leftrightarrow -f$ が下半連続)

このとき、

f が下半連続 $\Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$ が閉集合 ($\forall a \in \mathbb{R}$)

を示せ. \Rightarrow の逆も示せ. 下半連続または上半連続な関数は

可測であることを示せ.

(3) (Ω, \mathcal{F}) 上の可測関数の集合は、単関数を含まない各点収束に閉じて閉じている最小の関数クラスであることを示せ.

(4) $\sigma(X)$ を X が可測になる最小の σ -代数族とする. ($X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\text{つまり } \sigma(X^{-1}(B(\mathbb{R}))) = \sigma(\{X^{-1}(A) \mid A \in B(\mathbb{R})\})$$

このとき、 $Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が $\sigma(X)/B(\mathbb{R})$ -可測であることを示すための必要十分条件は

ある可測関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $Y = f(X)$ と書けることを示せ.

(5) X の特性関数の値 $\phi(t)$ が $\forall t \in \mathbb{R}$ で実数

$\Leftrightarrow X$ と $-X$ は同じ分布

(6) 特性関数 ϕ が $\int |\phi(t)| dt < \infty$ のとき.

その分布は密度関数 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx} \phi(t) dt$ を持つことを示せ.

(7) 一様分布 $U([a, b])$ の特性関数を求めよ.

(8) $X \sim U([-1, 1])$, $Y \sim U([-1, 1])$ (独立)

のとき, $Z = X + Y$ の特性関数を求めよ.

また, $Z = X + Y$ の分布の確率密度関数を求めよ.

(9) $X, Y =$ 独立

のとき, $X + Y$ と X が同じ分布 Z があるなら

$Y = 0$ (a.s.) Z があることを示せ.