

確率数理工学8

② 確率不等式

Thm ④ 重要

(1) Markov の不等式

$$X: \text{r.v.}$$

$$X \geq 0 \quad (\text{a.s.}) \text{ とおす.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ と}$$

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$$

(2) Chebyshev の不等式

$$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

Proof

$$\begin{aligned} (1) \quad E[X] &= E[X \mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\} + X \mathbb{1}\{X < \varepsilon\}] \\ &\geq E[\varepsilon \mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\}] + 0 \\ &= \varepsilon \cdot E[\mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\}] = \varepsilon P(X \geq \varepsilon) \quad // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) &= P(|X - E[X]|^2 \geq \varepsilon^2) \\ &\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{E[|X - E[X]|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2} \quad // \end{aligned}$$

(例) $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ($X_i: \text{i.i.d.}, \text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$)

$$\Rightarrow \text{Var}[X] = \frac{1}{n} \sigma^2 \Rightarrow P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon' \text{ とおきなおせば. } P(|X - E[X]| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon') \leq \frac{1}{\varepsilon'^2}$$

$$\Rightarrow |X - E[X]| = O_p\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) : \text{重要}$$

Cor (Markovの不等式の一般化)

φ : 単調増加かつ $\varphi(0) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), 可測

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)} \quad (\forall a \in \mathbb{R})$$

(\therefore) Markovの不等式より $P(X \geq a) = P(\varphi(X) \geq \varphi(a)) \leq \frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)} //$

Cor $P(X \geq a) \leq \frac{E[e^{tx}]}{e^{ta}} \quad (\forall t \geq 0, a \in \mathbb{R})$

* モーメント母関数を用いて X の裾確率を評価できる。
→ 様々な裾確率集中不等式に用いられている。

Thm (Hoeffdingの不等式) (★)

← 同一である必要はない

X_1, \dots, X_n : 独立 s.t. $a \leq X_i \leq b$ ($\forall i=1, 2, \dots, n$)

$E[X_i] = 0$ とおす。

≥ 0 とす。

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

($P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$ としても可)

Note

$\varepsilon = \frac{b-a}{\sqrt{2n}}$ とおけば。

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq \frac{b-a}{\sqrt{2n}}$$

とある裾確率 $A \cdot 2e^{-A^2}$ 以下である。 $\Rightarrow \left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

→ 大数の法則, 中心極限定理

(★) 先の Chebyshevの不等式と比較。裾確率 $A \cdot$

$O\left(\frac{1}{A^2}\right)$ とは $A < O(e^{-A^2})$ に A , 2つ。

(2乗) (指数)

→ X_i の有界性を用いて A の存在を裾確率評価に用いる。

Proof $P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}]}{e^{n t \varepsilon}} \quad (t > 0)$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n E[e^{t X_i}]}{e^{n t \varepsilon}} \quad (\because \text{独立})$$

$E[e^{t X_i}]$ を評価する.

$a \leq X_i \leq b$ より, $X_i = d b + (1-d) a$ ($d = \frac{X_i - a}{b - a}$ と書くと)

$x \mapsto e^{t x}$ の凸性より

$$\boxed{0 \leq d \leq 1}$$

$$e^{t X_i} \leq d e^{t b} + (1-d) e^{t a}$$

である. 右辺の期待値をとると.

$$\begin{aligned} E[e^{t X_i}] &\leq E[d] e^{t b} + E[1-d] e^{t a} \\ &= -\frac{a}{b-a} e^{t b} + \frac{b}{b-a} e^{t a} \\ &= p e^{t b} + (1-p) e^{t a} \\ &\quad (\text{ただし, } p = -\frac{a}{b-a} \geq 0) \end{aligned}$$

$$\psi(t) = \ln(p e^{t b} + (1-p) e^{t a}) \quad \text{とおくと}$$

この時 $P(Z=b) = p, P(Z=a) = 1-p$ なる Z の 2 点分布 (母関数)

$$\psi(0) = \ln(1) = 0$$

$$\psi'(0) = \frac{p b e^{0} + (1-p) a e^{0}}{p e^{0} + (1-p) e^{0}} \Big|_{t=0} = 0 \quad (\text{平均})$$

$$\psi''(t) = \frac{p b^2 e^{t b} + (1-p) a^2 e^{t a}}{p e^{t b} + (1-p) e^{t a}} - \frac{(p b e^{t b} + (1-p) a e^{t a})^2}{(p e^{t b} + (1-p) e^{t a})^2}$$

$$\Rightarrow p_t = \frac{p e^{t b}}{p e^{t b} + (1-p) e^{t a}} \quad \text{とおく.}$$

$Z_t \in \{b, a\}$ $P(Z_t = b) = p_t, P(Z_t = a) = 1 - p_t$ なる r.v. とおくと.

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= b^2 p_t + a^2 (1-p_t) - (b p_t + a (1-p_t))^2 \\ &= \text{Var}[Z_t] = \text{Var}\left[Z_t - \frac{a+b}{2}\right] \leq E\left[\left(Z_t - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leq \frac{(a-b)^2}{4} \end{aligned}$$

まず

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi(0) + t \psi'(0) + \frac{1}{2} t^2 \psi''(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq t) \\ &\leq 0 + 0 + \frac{1}{8} t^2 (a-b)^2 \end{aligned}$$

次に

$$E[e^{tX_i}] \leq \exp\left(\frac{t^2}{8} (b-a)^2\right) \quad (t \geq 0)$$

よって

$$\frac{\prod_{i=1}^n E[e^{tX_i}]}{e^{tn\varepsilon}} \leq \exp\left(\frac{nt^2}{8} (b-a)^2 - tn\varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{4\varepsilon}{(b-a)^2} \quad \varepsilon \text{ 以上 } \wedge \text{ 十分小}$$

$$\text{右辺} \leq \exp\left(\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2} - \frac{4n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

$$\bullet \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right| \geq \varepsilon \text{ のとき } P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) + P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-X_i) \geq \varepsilon\right)$$

から続く

Note

$a_i \leq X_i \leq b_i$ のように a, b が i に依存するとき

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

と主張できる。

• 証明は

$$E[e^{tX_i}] \leq e^{\frac{t^2}{2} \sigma^2} \quad (b_i): \text{sub-Gaussian}$$

← Gauss の条件が緩くても成り立つ

よって X_i が有界で $b_i < 2\varepsilon$

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2b^2}\right)$$

が成り立つ。

Thm (Bernstein の不等式)

X_1, \dots, X_n : 独立 (同-分布限定なし)

$E[X_i] = 0$, $\text{Var}[X_i] \leq \sigma^2$, $|X_i| \leq M$ (a.s.)

なら

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2 + \frac{2M}{3}t}\right) \quad (t \geq 0) //$$

\Rightarrow 分散の情報を利用して

分散が小さい場合は、よりよいバウンドを得る。

* Hoeffding, Bernstein および他の極値は統計や学習理論で頻繁に用いられる。

参考 Thm (Gaussian 集中不等式)

X_1, \dots, X_n は独立同一に標準正規分布に従うとする。

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は L -Lipschitz 連続とする。

$$P\left(f(X_1, \dots, X_n) - E[f(X_1, \dots, X_n)] \geq t\right) \leq e^{-\frac{t^2}{2L^2}} \quad (t > 0) //$$

* 確率率 n に依存しない!

ある有限な関数クラス G に対し

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sup_{g \in G} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i g(z_i) \quad (z_i \text{ は固定})$$

これを用いる。 \rightarrow ノンパラメトリック, 学習理論 2: 現出 (Gaussian width)

Thm (Talagrand の集中不等式)

$G: \|\cdot\|_\infty$ -norm に閉じた有限な関数クラス

$\forall g \in G$ $E[g(X)] = 0$, $\text{Var}[g] \leq \sigma^2$, $\|g\|_\infty \leq M$ なら

$$P\left(\sup_{g \in G} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \geq 2 E\left[\sup_{g \in G} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)\right] + \sqrt{\frac{2t\sigma^2}{n}} + \frac{2M}{n}t\right) \leq e^{-t} //$$

\rightarrow 2nd 極値の不等式

④ 確率変数列の収束 ★重要

(Ω, \mathcal{F}, P) : prob. sp.

X_1, X_2, \dots : r.v. の列 on (Ω, \mathcal{F}, P)

X : 別の r.v.

F_n : X_n の分布関数

F : X の分布関数

Def (確率変数列の収束) ★重要

1. 根拠収束 (convergence almost surely)

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \stackrel{\text{def}}{\iff} P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$$

2. 確率収束 (convergence in probability)

$$X_n \xrightarrow{P} X \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

3. p -次平均収束, L^p -収束 (conv. in p -th degree mean, conv. in L^p)

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \stackrel{\text{def}}{\iff} \|X_n - X\|_p \rightarrow 0 \quad (p \geq 1)$$

4. 法則収束 (convergence in law, distribution weak convergence)

$$X_n \xrightarrow{w} X \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \text{ の } F(x) \text{ の連続点 } x \text{ において}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

※ L^p -空間は L^p -収束に関して 完備 (任意の $Cauchy$ -列が L^p -空間内で収束先を持つ)
 \implies L^p -空間は Banach 空間

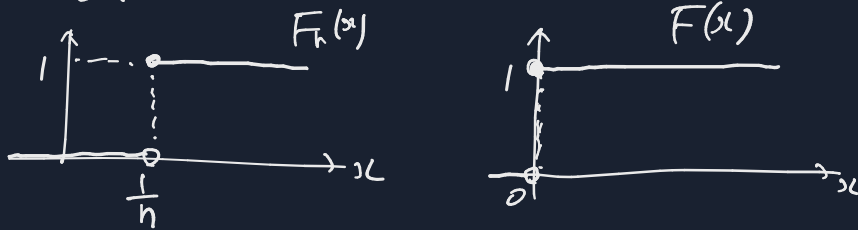
• 収束の定義

- Fの連続点の定義 (理由):

$$X_n \in P(X_n = \frac{1}{n}) = 1 \text{ なる r.v.}$$

$$X \in P(X=0) = 1 \text{ なる r.v.}$$

とすると



$\frac{1}{n} \rightarrow 0$ かつ $X_n \rightsquigarrow X$ と考えたとき

かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{F_n(0)}_0 \neq \underbrace{F(0)}_1$ かつ 不連続点 $x=0$ かつ

収束が成り立たない。→ 不連続点は除外した方が都合良い。

→ 弱収束 とは言う。

別定義 (Portmanteauの定理)

① $X_n \rightsquigarrow X \iff \forall f: \text{有界連続}$ に対し、
 $E[f(X_n)] \rightarrow E[f(X)]$

② 任意の開集合 A に対し、

$$\limsup P(X_n \in A) \leq P(X \in A)$$

③ 任意の開集合 B に対し、

$$\liminf P(X_n \in B) \geq P(X \in B)$$

④ C_0 : 有界連続関数 f かつ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ なる関数の集合

C_0 上の任意の有界線形写像 T は

ある正則 Borel 測度 μ を用いて

$$T(f) = \int f d\mu$$

と書ける。

(Rieszの表現定理)

$\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ (非負 Borel 測度)

補足

μ^* : μ により定めた外測度

Def. (1) μ は正則 Borel $\Leftrightarrow \forall A \subseteq \mathbb{R}^d, \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ s.t. $A \subseteq B$ かつ $\mu^*(A) = \mu(B)$.

(2) μ は Radon \Leftrightarrow 正則 Borel かつ、任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ に対し $\mu(K) < \infty$.

C_c : コンパクト台を持つ有界連続関数の集合.

Thm (1-2 の表現定理)

$L: C_c \rightarrow \mathbb{R}$ を線形汎関数とし、

$$\sup \{ |L(f)| \mid f \in C_c, \|f\|_\infty \leq 1, \text{supp}(f) \subseteq K \} < \infty$$

かつ任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ に対し (2) 成り立つものとする。すると、ある Radon 測度 μ と μ -可測関数 σ で $|\sigma(x)| = 1$ (μ -a.e.) なるものが存在して、

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \sigma \, d\mu$$

とできる。

Radon 測度の汎弱収束 (Weak*-convergence)

以下は同値.

(1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu$ ($\forall f \in C_c$)

(2) 任意のコンパクト集合 K に対し $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)$ かつ、任意の開集合 U に対し $\mu(U) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U)$.

(3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B) = \mu(B)$ かつ任意の有界ホールド集合 B で $\mu(\partial B) = 0$ なる B に対し成り立つ。

narrow topology における測度の収束 (狭位相)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu \quad (\forall f: \text{有界連続})$$

汎弱収束 (狭位相) の収束 (狭位相)

有界連続: 1. $\mu_n \rightarrow \mu$ (狭位相) 2. $\mu_n \rightarrow \mu$ (汎弱) かつ $\mu_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mu(\mathbb{R}^d)$ は同値. \Rightarrow 確率測度なら等価

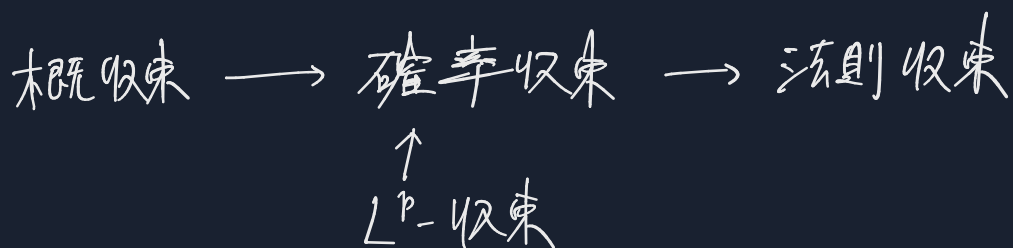
$f(x) = \sin(\pi x + \frac{\pi}{2})$, $\mu_k = \delta_k$ とすると $\delta_k \rightarrow \mu$ (汎弱) かつ $\delta_k \not\rightarrow \mu$ (狭位相).

Thm (収束間の関係性) 8

$$(1) X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$

$$(2) X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \rightsquigarrow X$$

$$(3) X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$



Proof

(1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ かつ

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{m} \right\}\right) = 1$$

\uparrow 任意の m に対し, ある N が存在し, 任意の $n \geq N$ に対し $|X_n - X| \leq \frac{1}{m}$ が成立する事象

と等しい事象, かつ, $\forall \varepsilon > 0$ に対し, 十分大整数 m_0 存在し, かつ $\frac{1}{m_0} \leq \varepsilon$ となる.

$$1 = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \{ \dots \} \right)$$

$$\leq P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{m_0} \right\}\right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{m_0} \right\}\right)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left\{ |X_N - X| \leq \frac{1}{m_0} \right\}\right)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left\{ |X_N - X| \leq \varepsilon \right\}\right)$$

つまり, $X_n \xrightarrow{p} X$ である.

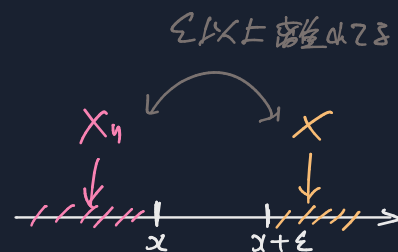
(2) $x \in F$ の連続点とする.

$$F_n(x) = P(X_n \leq x)$$

$$= P(\{X_n \leq x\} \cap \{x \leq x + \varepsilon\})$$

$$+ P(\{X_n \leq x\} \cap \{x > x + \varepsilon\})$$

$$\leq \underbrace{P(X \leq x + \varepsilon)}_{F(x + \varepsilon)} + \underbrace{P(|X_n - x| \geq \varepsilon)}_{\downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \text{ } (\because X_n \xrightarrow{p} x)}$$



$$F(x - \varepsilon) = P(X \leq x - \varepsilon)$$

$$= P(\{X \leq x - \varepsilon\} \cap \{X_n \leq x\})$$

$$+ P(\{X \leq x - \varepsilon\} \cap \{X_n > x\})$$

$$\leq \underbrace{P(X_n \leq x)}_{F_n(x)} + \underbrace{P(|X - X_n| \geq \varepsilon)}_{\downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 0}$$

以上より $F(x - \varepsilon) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$

F は連続な点 x : $\varepsilon \rightarrow 0$ とする $\varepsilon > 0$.

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$$

を得る.

(3) Markov の不等式 (*)

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ とき } P(|X_n - x| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X_n - x|^p]}{\varepsilon^p} \rightarrow 0$$

$$(\because X_n \xrightarrow{L^p} x)$$

(注) 弱収束にあつては X_n と X は同じ prob. sp. 上にいる必要はない.
確率収束と概収束は同じ prob. sp. 上.

反例

(1) の逆は成り立たない例

(各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して X_n と X は十分近いから、
 $(X_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$ と $n \in \mathbb{Z}$ 通じの列を考慮して $X(\omega)$ を収束(する)状態を考慮すれば良い。

$\Omega = [0, 1)$, P は Ω 上の一様分布

$n = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ とする ($n = 2^k$)

$$X_{n,i} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (\frac{i-1}{n} \leq \omega < \frac{i}{n}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$k=0$: $X_1 = X_{1,1} = 1$ (a.s.)

$k=1$: $X_2 = X_{2,1} = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})}$

$X_3 = X_{2,2} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)}$

$k=2$: $X_4 = X_{4,1} = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4})}$

$X_5 = X_{4,2} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})}$

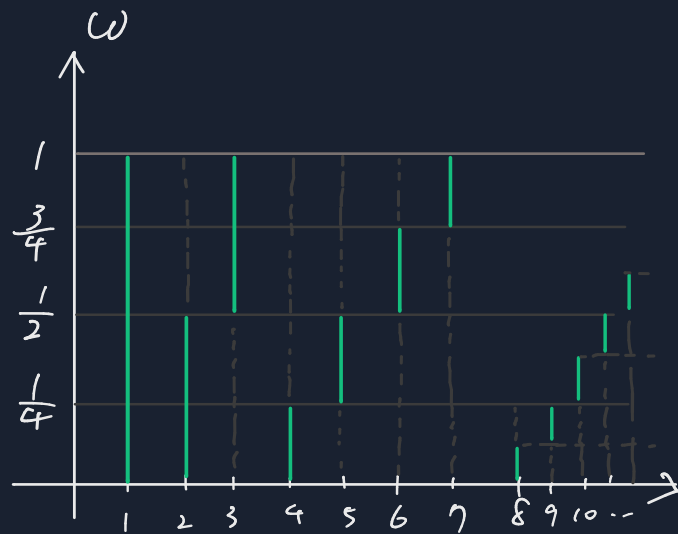
$X_6 = X_{4,3} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})}$

$X_7 = X_{4,4} = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1)}$

$k=3$: $X_8 = X_{8,1} = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{8})}$

\vdots

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$



— 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26, 2.27, 2.28, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33, 2.34, 2.35, 2.36, 2.37, 2.38, 2.39, 2.40, 2.41, 2.42, 2.43, 2.44, 2.45, 2.46, 2.47, 2.48, 2.49, 2.50, 2.51, 2.52, 2.53, 2.54, 2.55, 2.56, 2.57, 2.58, 2.59, 2.60, 2.61, 2.62, 2.63, 2.64, 2.65, 2.66, 2.67, 2.68, 2.69, 2.70, 2.71, 2.72, 2.73, 2.74, 2.75, 2.76, 2.77, 2.78, 2.79, 2.80, 2.81, 2.82, 2.83, 2.84, 2.85, 2.86, 2.87, 2.88, 2.89, 2.90, 2.91, 2.92, 2.93, 2.94, 2.95, 2.96, 2.97, 2.98, 2.99, 3.00

とすると $P(|X_m| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{2^k}$ (if $2^k \leq m < 2^{k+1}$) ($0 < \epsilon \leq 1$)

すなわち $X_m \xrightarrow{P} 0$

しかし $\forall \omega \in [0, 1)$ 1-ほとんど $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 1$,

$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0$ ほとんど.

a.s. 2-収束(する)から $X_n \xrightarrow{a.s.} X = 0$ は成り立たない。

(2) の逆が成り立つ例]

$\Omega = \{0, 1\}$ とし. $P(\omega=0) = P(\omega=1) = \frac{1}{2}$ とする.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega=0) \\ 0 & (\omega=1) \end{cases}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega=0) \\ 1 & (\omega=1) \end{cases}$$

したがって、当然 $|X_n - X| = 1$ (a.s.) となる. $X_n \xrightarrow{p} X$ ではない.

しかし、 $F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases} = F(x)$ となる.

$F_n(x) = F(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) となる. したがって、 $X_n \xrightarrow{d} X$ である.

$\hookrightarrow \lim F_n(x) = F(x)$ である.



演習問題

(1) $X_n \xrightarrow{p} X$ なる、ある部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が存在し、

$X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$ とするのを示せ。

(ヒント: Borel-Cantelli の補題: 1-19)

(2) (X_n) が、確率収束の意味での \mathcal{C} - \mathcal{C} - \mathcal{C} - \mathcal{C} 列 (2-2-in prob.)
 $\iff \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ に対し、 $\exists N$ として

$$P(|X_n - X_m| \geq \varepsilon) \leq \delta \quad (\forall n, m \geq N)$$

 とする。

(a) $X_n \xrightarrow{p} X$ なる (X_n) は \mathcal{C} - \mathcal{C} - \mathcal{C} - \mathcal{C} 列 in prob. であることを示せ。

(b) $(X_n)_n$ が \mathcal{C} - \mathcal{C} - \mathcal{C} - \mathcal{C} 列 in prob. のとき、ある r.v. X が存在し、

$X_n \xrightarrow{p} X$ とするのを以下の手順で示せ:

(i) ある部分列 $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ が存在し、

$$P(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}) < 2^{-j}$$

とできることを示せ。

(ii) X_{n_j} は a.s. で収束することを示せ (ヒント: Borel-Cantelli)
 その収束先を X とおく。 (X は可測)

(iii) $X_n \xrightarrow{p} X$ を示せ。

(3) $(X_n)_n$ が一様可積分 $\iff \lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|X_n| \geq a} |X_n| dP \rightarrow 0$

とする。

(X_n) が一様可積分ならば、 $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ とするのを示せ。

(4) X_n が単調増大な r.v. 列で $X_n \xrightarrow{p} X$ とする。

このとき、 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ であることを示せ。

(5) $X_n \xrightarrow{p} X \iff$ 任意の部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ 必し \pm 収束部分列 $(X_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ を持ち、 $X_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.s.} X$ である。
 ことを示せ。

(6) $X_n \xrightarrow{p} X, Y_n \xrightarrow{p} Y$ である。

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$ を示せ。

(b) $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$ を示せ (5) を用いて示せ)

(7) $(X_n)_n$: i.i.d. であり $E[X_n] = \mu, \text{Var}[X_n] = \sigma^2$ ($\sigma^2 < \infty$) である。

$$\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$$
 であることを示せ。

(8) 以下を示せ:

(a) $X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \implies \bar{X}_n (= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) \xrightarrow{a.s.} 0$

(b) $X_n \xrightarrow{L^p} 0 \implies \bar{X}_n \xrightarrow{L^p} 0$
 ($p \geq 1$)

(c) $X_n \xrightarrow{p} 0 \implies \bar{X}_n \xrightarrow{p} 0$ と 同様に示すことは反例を挙げることができる。

(d) $\bar{X}_n \xrightarrow{p} 0 \implies \frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0$

(9) $S \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とする。

(参考問題) S 上のカウシ過程 G_u ($u \in S$) とは、任意の有限個の

$\{u_1, \dots, u_\ell\} \subset S$ に対し、 $(G_{u_1}, \dots, G_{u_\ell})$ が多変量正規分布に従うことを示す。

ある2つの \mathcal{F} 上の Gauss 過程 G_u, G'_u が

$$(i) E[G_u] = E[G'_u] = 0 \quad (u \in \mathcal{F})$$

$$(ii) E[(G_u - G_v)^2] \leq E[(G'_u - G'_v)^2] \quad (u, v \in \mathcal{F})$$

をみたす。 G_u, G'_u は \mathcal{F} 上の a.s. 2- u に \mathcal{F} 有界かつ連続な過程と仮定する。このとき、

$$E\left[\sup_{u \in \mathcal{F}} G_u\right] \leq E\left[\sup_{u \in \mathcal{F}} G'_u\right]$$

を示す。これは known result (Stein の不等式)。

今 $\mathcal{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ 上の単位球面 ($\mathcal{S}^{d-1} = \{ \|x\| = 1 \mid x \in \mathbb{R}^d \}$) とする。

$(A_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d}$ を A_{ij} が i.i.d. $N(0, 1)$ に従うランダム行列と仮定する。

ある $u \in \mathcal{S}^{d-1}, v \in \mathcal{S}^{d-1}$ とする。

$$G_{(u,v)} := u^T A v$$

とする。一方 g, g' を独立な \mathbb{R}^d -値 r.v. とし、 $g \sim N(0, I), g' \sim N(a, I)$ とする。
(多変量正規分布)

$$G'_{(u,v)} := u^T g + v^T g'$$

と仮定する。

$$E\left[\sup_{(u,v) \in \mathcal{S}^{d-1} \times \mathcal{S}^{d-1}} G_{(u,v)}\right] \leq E\left[\sup_{(u,v) \in \mathcal{S}^{d-1} \times \mathcal{S}^{d-1}} G'_{(u,v)}\right]$$

を示す。まず、

$$E[\|A\|] \leq 2\sqrt{d}$$

$$\begin{aligned} & \uparrow \\ & \text{operator-norm} \\ \|A\| &:= \sup_{\substack{u \in \mathcal{S}^{d-1} \\ v \in \mathcal{S}^{d-1}}} u^T A v \end{aligned}$$

を示す。

(10) (9)の設定で: Gaussian 集中不等式より

(参考問題) $P(\|A\| \geq 2\sqrt{d} + t) \leq \exp(-\frac{t^2}{2}) \quad (t > 0)$

を示せ. (ランダム行列の作用素ノルム)

(11) X_i を i.i.d., 非負の r.v. とする.

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i \quad \text{と} \text{する.}$$

(a) $P(M_n > x) \leq n P(X_1 > x) \quad (x > 0)$ を示せ.

(b) $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \iff n P(X_1 > n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

を示せ.