確率数理工学9

⑪ 大数の法則と中心極限定理

- 大数の法則

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[\text{a.s. (強)}]{p\ (\text{弱})} \mu$$

（標本平均）　　　　（真の平均）

- 中心極限定理

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right) \rightsquigarrow \text{正規分布}$$

(注) それぞれどういう意味で「収束」しているかを明確に理解すること。
何となく「正規分布に収束する」という理解で止めない。

Thm（大数の弱法則）☆

$X_i\ (i=1,2,\dots)$：互いに独立

$E[X_i]=\mu_i,\quad Var[X_i]=\sigma_i^2$ で、

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n^2} \longrightarrow 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{n} \longrightarrow \mu \quad \text{なら}$$

← n^2 で割っている

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

である。

特に、X_i が i.i.d. で $E[X_i]=\mu$（有限），$Var[X_i]<\infty$ なら

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$$

である。

証明 $\bar{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$ とおると、仮定より $\bar{\mu}_n \to \mu$ である。

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geqq \varepsilon) \leqq P\left(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \cup |\bar{\mu}_n - \mu| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\leqq \underbrace{P\left(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{①} + \underbrace{P\left(|\bar{\mu}_n - \mu| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{②}$$

- $\bar{\mu}_n \to \mu$ より ② $\to 0$
- 一方、 $P\left(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{\text{Markov}}{\leqq} \dfrac{E[(\bar{X}_n - \bar{\mu}_n)^2]}{\frac{\varepsilon^2}{4}} \leqq \dfrac{E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)\right)^2\right]}{\frac{\varepsilon^2}{4}}$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu_i)^2]}{\frac{\varepsilon^2}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{\frac{\varepsilon^2}{4}} \longrightarrow 0 \quad (\because 仮定)$$

つまり、 $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ である。 //

確率収束は概収束に変えられる：大数の強法則

事象の列 $A_n \in \mathcal{F}$ $(n=1,2,\dots)$ があったとして、その上極限を

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

とする。 $\omega \in \limsup A_n$ なら、任意の n に対し、ある $k \geq n$ が存在して、

$\omega \in A_k$ である。つまり、ω は無限個の A_n に含まれる。（逆も然り）

このことから

$$\limsup A_n = A_n \ \text{i.o.}$$

とも書く。（i.o. = infinitely often）

Thm（Borel - Cantelli の補題）

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

2. $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ は独立で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

//

（証明） 1. 任意の N に対し、

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leqq P\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right)$$

$$\leqq \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) \quad \text{（劣加法性）}$$

である。今 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ より、$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) = 0$ である。

よって、$N \to \infty$ とすることで、

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leqq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=N}^{\infty} P(A_n) = 0$$

を得る。

2.

↳ 次ページへ

まず.

$$P\left(\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)^c\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)^c\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right)$$

であるので. $P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) = 0$ ($^\forall k=1,2,\dots$) を示せば良い.

今 任意の N に対し.

$(A_n)_n$ は独立

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) \leq P\left(\bigcap_{n=k}^{N} A_n^c\right) = \prod_{n=k}^{N} P(A_n^c)$$

$$= \prod_{n=k}^{N}(1-P(A_n)) \leq \prod_{n=k}^{N} e^{-P(A_n)}$$

$$= e^{-\sum_{n=k}^{N} P(A_n)}$$

である. $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ より. $^\forall k$ で $\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = \infty$ でもある. よって.

$N\to\infty$ とすることで. 右辺 $\to 0$ である. よって示された. //

Thm（大数の強法則）

$X_i \ (i=1,2,\dots)$: 独立

$E[X_i]=\mu$: 有限

$Var[X_i]=\sigma^2<\infty$, $\quad \nu_4 = E[|X_i-\mu|^4] < \infty$

ならば、

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$$

概収束!

//

（証明）$\forall \varepsilon>0$ に対し、

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} |\overline{X}_n-\mu| \geqq \varepsilon\right) = 0$$

を示す。これが示せれば、確率の連続性より

$$\begin{aligned}
P\left(\exists \lim_{n\to\infty} |\overline{X}_n-\mu| = 0\right) &= 1 - P\left(\exists\varepsilon>0, \limsup_{n\to\infty} |\overline{X}_n-\mu| \geqq \varepsilon\right) \\
&= 1 - P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\limsup_{n\to\infty} |\overline{X}_n-\mu| \geqq \frac{1}{m}\right\}\right) \\
&= 1 - \lim_{m\to\infty} P\left(\limsup_{n\to\infty} |\overline{X}_n-\mu| \geqq \frac{1}{m}\right) \\
&= 1-0 = 1
\end{aligned}$$

が示せる。

$A_n := \{|\overline{X}_n-\mu| \geqq \varepsilon\}$ として、$(A_n)_{n=1}^{\infty}$ に Borel-Cantelli を適用する。

$$P(A_n) = P(|\overline{X}_n-\mu| \geqq \varepsilon)$$

Markovの不等式

$$\leqq \frac{E[|\overline{X}_n-\mu|^4]}{\varepsilon^4}$$

(1次, 3次のcross-termは0)

であるが、

$$E[|\overline{X}_n-\mu|^4] = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} E[(X_i-\mu)^4] + \underbrace{\frac{\binom{4}{2}}{n^4}\sum_{i<j} E[(X_i-\mu)^2(X_j-\mu)^2]}_{\boxed{\frac{6}{n^4}\frac{n(n-1)}{2}\sigma^4 = \frac{3(n-1)}{n^3}\sigma^4}}$$

$$= \frac{\nu_4}{n^3} + \frac{3(n-1)}{n^3}\sigma^4 \leqq \frac{K}{n^2} \quad (K := \nu_4 + 3\sigma^4 < \infty)$$

よって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leqq \frac{K}{\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$ なので、Borel-Cantelli より

$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$. つまり、$P\left(\limsup_{n\to\infty} |\overline{X}_n-\mu| \geqq \varepsilon\right) = 0$ //

※チェックせよ.

㊟ 実は X_n が i.i.d. なら分散やモーメントの条件を外せる
(独立同一)

Thm ← 分散の仮定は不要

X_i : i.i.d. , $E[X_i]=\mu$ (有限) とする.

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu$$

(証明は Web 上の補足資料を参照)

・分布の極限

Thm (Levy の連続性定理) ㊟

X_n : r.v.

ϕ_n : X_n の特性関数 $(\phi_n(t)=E[e^{itX_n}])$

(i) X : r.v.

ϕ : X の特性関数

$$X_n \rightsquigarrow X \iff \phi_n(t) \to \phi(t) \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

(各点収束)

(ii) ある $\phi(t)$ が存在して, $\phi_n(t)\to\phi(t)$ $(\forall t\in\mathbb{R})$ かつ

$\phi(t)$ が $t=0$ で連続なら, ϕ を特性関数として持つ

r.v. X が存在して

$$X_n \rightsquigarrow X$$

が成り立つ

※多変量でも同様に. $\phi(t):=E[e^{it^TX}]$ $(t\in\mathbb{R}^d)$ として.

「$X_n \rightsquigarrow X \iff \phi_n(t)\to\phi(t)$ $(\forall t\in\mathbb{R}^d)$」

が成り立つ

Cor (Cramer-Wold device)

$$X_n \rightsquigarrow X \iff t^TX_n \rightsquigarrow t^TX \quad (\forall t\in\mathbb{R}^d)$$

↑ d次元 r.v.

Thm (中心極限定理) Central Limit Theorem (CLT)

X_n : i.i.d.

$E[X_n] = \mu$: 有限

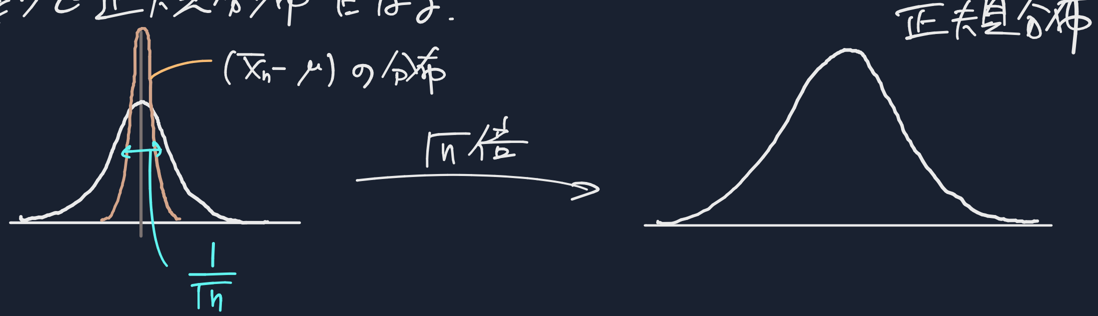
$Var[X_n] = \sigma^2 < \infty$, $\sigma^2 \neq 0$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおくと,

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$$

Note

$\bar{X}_n - \mu \to 0$ (a.s.) であるが. $\sqrt{n}$倍膨らませることで.
ちょうど正規分布になる.



(証明) $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ の特性関数

$$\Phi_n(t) = E\left[e^{it\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}\right]$$
$$= E\left[e^{\sum_{j=1}^{n} \frac{it}{\sqrt{n}}(X_j - \mu)}\right]$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \underbrace{E\left[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}(X_j - \mu)}\right]}_{\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \text{とおく.}}$$

← $X_j - \mu$ の特性関数

$$\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(0)\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

← 分散が有限ならば ϕは連続2回微分可能

$$= 1 + \underbrace{0}_{E[X_j - \mu] = 0} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$$

より.

$$\Phi_n(t) = \left(1 - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \to \infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

↓ $N(0, \sigma^2)$ の特性関数

あとはLevyの連続性定理より. CLTが従う. //

※ CLT は $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$ も与える.

Ex. (Bernoulli 試行の CLT)

$P(X_j=1)=\theta,\ P(X_j=0)=1-\theta \quad (0<\theta<1)$

$E[X_j]=\theta,\ Var[X_j]=\theta(1-\theta)$ なので.

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

//

ある選挙に2人の候補者 A, B がいる.

$X_i=1$ (有権者 i が A に投票), $X_i=0$ (i が B に投票) とする.

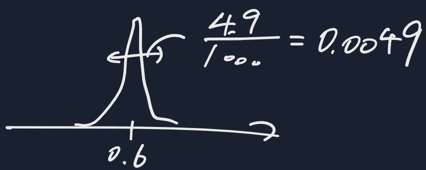
A を支持する人の割合 60%, B を支持する人の割合 40% とする.

X_i は $\theta=0.6$ の Bernoulli 分布に従う.

今 $n=1$万人 の開票後, $\bar{X}_n$ はおよそ

$N\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right) = N\left(0.6, \frac{0.4\times 0.6}{10^4}\right) = N(0.6, 24\times 10^{-6})$

に従う.



Thm (Poisson の小数の法則)

$Y_n \sim B(n, \theta_n)$ (n回のコイン投げ)

$n\theta_n \longrightarrow \lambda \quad (n\to\infty)$ とする. このとき,

$Y_n \rightsquigarrow Po(\lambda)$

Proof Y_nの特性関数 $= \phi_n(t) = (\theta_n e^{it} + (1-\theta_n))^n$

$= (1-\theta_n(1-e^{it}))^n$

$= \left\{1-\frac{\lambda}{n}[(1-e^{it})+o(1)]\right\}^n$

$\longrightarrow \exp(-\lambda(1-e^{it}))$: $Po(\lambda)$ の特性関数

//

例 不良品が出る確率が低い製品を大量に生産すると. その中に入っている不良品の個数は大体ポアソン分布.

Lem (Slutskyの補題)

$X_n \rightsquigarrow X$ かつ $Y_n \rightsquigarrow c$ (定数) のとき (X_n, Y_nは独立とは限らない)

(1) $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$

(2) $X_n Y_n \rightsquigarrow cX$ //

(証明は略)

Thm (分散が未知の場合のCLT)

$$\hat{\sigma}_n^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \quad (\text{標本分散})$$

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\hat{\sigma}_n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

(信頼区間の計算に使える)

Proof 大数の法則より $\hat{\sigma}_n^2 \longrightarrow Var[X_1]$ (a.s.) なので

Slutskyの補題とCLTより従う //

—Delta法

Thm (Delta法)

$(X_n)_n$: i.i.d.

$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$ を仮定

f: 1回微分可能かつ, $f'(\mu) \neq 0$ とすると,

$$\frac{\sqrt{n}\left(f(\overline{X}_n) - f(\mu)\right)}{|f'(\mu)|\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$X_n = o_p(a_n) \Longleftrightarrow \frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{P} 0$

スモールオーダー

(略証) $f(\overline{X}_n) - f(\mu) = f(\mu) + (\overline{X}_n - \mu)f'(\mu) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f(\mu)$

$$= (\overline{X}_n - \mu)f'(\mu) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

よって.

$$\frac{\sqrt{n}\left(f(\overline{X}_n) - f(\mu)\right)}{|f'(\mu)|\sigma} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \cdot \underbrace{\frac{f'(\mu)}{|f'(\mu)|}}_{= \pm 1} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\rightsquigarrow N(0,1) \quad (\text{by Slutsky}) \quad //$$

Thm (多変量のCLT)

X_i : $\mathbb{R}^d$-値 r.v. (i.i.d.)

$E[X_i] = \mu \in \mathbb{R}^d$

$E[(X_i-\mu)(X_i-\mu)^T] = \Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$

($\Sigma > 0$ とする)

$\Longrightarrow \quad \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \Sigma)$

(多変量正規分布) //

また、$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が微分可能で

$$\nabla f(\mu) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mu), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(\mu)\right]^T (\in \mathbb{R}^d) \neq 0$$

ならば、

$$\sqrt{n}(f(\overline{X}_n) - f(\mu)) \rightsquigarrow N(0, \nabla f(\mu)^T \Sigma \nabla f(\mu))$$

//

Ex.

$$\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{pmatrix}, \cdots, \underset{X_n}{\begin{pmatrix} X_{n1} \\ X_{n2} \end{pmatrix}} : \text{i.i.d.}$$

$$\mu = E[X_i] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \Sigma = Cov(X_i) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

CLTより、$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \rightsquigarrow N(0, \Sigma)$ である。

$f(x, z) = xz$ とすると、$\nabla f(x, z) = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$ より、

$$\nabla f(\mu)^T \Sigma \nabla f(\mu) = \mu_2^2 \sigma_{11} + 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2 \sigma_{22}$$

である ので、

$$\sqrt{n}(\overline{X}_{1,n}\overline{X}_{2,n} - \mu_1\mu_2) \rightsquigarrow N(0, \mu_2^2\sigma_{11} + 2\mu_1\mu_2\sigma_{12} + \mu_1^2\sigma_{22})$$

//