

補足資料：確率測度の一意性と構成

- Dynkinの π - λ 定理：ある集合族 \mathcal{P} 上2つの確率測度 μ_1, μ_2 が、 \mathcal{P} の生成した σ -加法族 \mathcal{G} 上で一致する。

応用例：同じ分布関数を持つ測度は $B(\mathbb{R})$ 上で一意
 \rightarrow 一意性

- Hopfの拡張定理：ある有限加法族 \mathcal{P} 上の確率測度は、その有限加法族を含む最小の σ -加法族 \mathcal{G} 上の確率測度に拡張される。

\rightarrow 存在性

(もちろん、その拡張が一意的であることも含めて Hopfの拡張定理と通常は言う。)

\hookrightarrow 演習問題も参照

- Dynkinの π - λ 定理

目標：分布関数 F が与えられると、対応する確率測度 P が一意的に定まることを示す。つまり、2つの確率測度 P_1, P_2 が

$$P_1((-\infty, a]) = P_2((-\infty, a]) = F(a) \text{ をみたすなら}$$

$$P_1(A) = P_2(A) \quad (\forall A \in B(\mathbb{R})) \text{ となることを示す。 (ただし、そのような測度は存在することは仮定)}$$

\hookrightarrow Hopfの拡張定理

Def

π -システム：集合族 \mathcal{P} が π -システム $\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{P}$ なら $A \cap B \in \mathcal{P}$

(有限回の共通部分を取る操作 \cap を繰り返して)

λ -システム：集合族 \mathcal{L} が λ -システム \Leftrightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \Omega \in \mathcal{L} \\ (2) A, B \in \mathcal{L}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{L} \\ (3) A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{L} \\ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \end{array} \right.$$

◻ σ -加法族は π -システムでも λ -システムでもある。

//

$\mathcal{G}(P)$: P を含む最小の σ -加族

$\mathcal{L}(P)$: P を含む最小の λ -システム

Thm (Dynkinの定理)

(1) \mathcal{P} は π -システムで、 \mathcal{L} は \mathcal{P} を含む λ -システム ($\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$) であるとする。
すると、 $\mathcal{G}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ である。

(2) π -システム \mathcal{P} に対し、

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\mathcal{P})$$

が成り立つ。

証明は後述とす。 (1) \Rightarrow (2) はすぐわかる。仮定から、(1)より

$\mathcal{G}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ は示す必要あり。かつ任意の σ -加族は λ -システムでもあるので、

$\mathcal{G}(\mathcal{P})$ は \mathcal{P} を含む λ -システムでもある。つまり $\mathcal{G}(\mathcal{P}) \supset \mathcal{L}(\mathcal{P})$ が成り立つ。

よって $\mathcal{G}(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\mathcal{P})$ である。

Dynkinの定理より、次の命題が示せる。

Cor 1

(Ω, \mathcal{F}) 上の確率測度 P_1, P_2 が、ある π -システム $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ において、

$$\forall A \in \mathcal{P} \text{ として } P_1(A) = P_2(A)$$

をみたすなら、

$$\forall B \in \mathcal{G}(\mathcal{P}) \text{ として } P_1(B) = P_2(B)$$

が成り立つ。

さらに、この系として、分布関数が共通な2つの確率測度 P_1, P_2 が $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上で一致するこを示せる。

Cor 2

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P_1, P_2 が

$$P_1((-\infty, a]) = P_2((-\infty, a]) = F(a) \quad (\forall a \in \mathbb{R})$$

をみたすなら、
 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上で $P_1 = P_2$ である。

(Cor 2の証明)

$\mathcal{P} = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ は π -システムである。仮定より、 $\forall A \in \mathcal{P}$ として $P_1(A) = P_2(A)$ である。よって Cor 1 より $P_1(B) = P_2(B)$ ($\forall B \in \mathcal{G}(\mathcal{P})$) である。こゝで、

$\mathcal{G}(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることに注意すると、こゝでは $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上で $P_1 = P_2$ であることは他ならない。

(Cor 1の証明)

まず: $\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{F} \mid P_1(A) = P_2(A)\}$ とする. \mathcal{L} は λ -システムにた. 2. のことを示す.

(1) $P_1(\Omega) = 1, P_2(\Omega) = 1 \neq 1$. $\Omega \in \mathcal{L}$.

(2) $A, B \in \mathcal{L}, A \subset B$ とする. $P_1(A) = P_2(A)$ の $P_1(B) = P_2(B)$ である. 確率測度の性質 (加法性) より.

$$P_1(B \setminus A) = P_1(B) - P_1(A) = P_2(B) - P_2(A) = P_2(B \setminus A).$$

よって, $B \setminus A \in \mathcal{L}$ を得る.

(3) $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \in \mathcal{L}$ とする. 確率の連続性より

$$P_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_1(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_2(A_n) = P_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

よって, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ である.

以上より, \mathcal{L} は λ -システムであることがわかる.

仮定より $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ である. Dynkin の定理より, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ である.

\mathcal{L} 上で P_1 と P_2 は一致するので, $\sigma(\mathcal{P})$ 上でも両者は一致する.



よって, Dynkin の定理を示すか, その前に次のことを注意しておく.

Lem

$$\mathcal{L} \text{ は } \lambda\text{-システム} \iff \begin{cases} (1)' \Omega \in \mathcal{L} \\ (2)' A \in \mathcal{L} \implies A^c \in \mathcal{L} \\ (3)' A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m), A_n \in \mathcal{L} \text{ なら, } \\ \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L} \text{ である.} \end{cases}$$



(証明) (\implies のみを示す)

(1)' は定義から自明. (2)' も $\Omega \in \mathcal{L}$ であるから $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}$. 更に $A^c \in \mathcal{L}$ である.

(3)' を示す. そのため, まずは $A, B \in \mathcal{L}, A \cap B = \emptyset$ に対し.

$A \cup B \in \mathcal{L}$ であることを見よう. (2) より $\Omega \setminus A \in \mathcal{L}$ である. 更に $B \subset \Omega \setminus A$ である.

$(\Omega \setminus A) \setminus B \in \mathcal{L}$ であること. $(\Omega \setminus A) \setminus B = A^c \cap B^c$ である. $A^c \cap B^c \in \mathcal{L}$.

(2)' より, $A^c \cap B^c \in \mathcal{L}$ なら $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B \in \mathcal{L}$ である.



(Dynkinの定理の証明)

証明の方針: $\mathcal{L}(P)$ は π -システムであることを示す. 実は λ -システムは π -システムであるから, これは σ -加法族であることを示せばいい.
 $\mathcal{G}(P) \subset \mathcal{L}(P)$ が成り立つ.

Lem

ある集合族 \mathcal{B} が π -システムでも λ -システムでもあるとき, \mathcal{B} は σ -加法族である.

(証明)

- (1) $\Omega \in \mathcal{B}$ は λ -システムの定義より明らか.
- (2) $A \in \mathcal{B}$ なら $A^c \in \mathcal{B}$ であることを性質 (2)' から従う.
- (3) 有限和の \cup に関して示す.

$A, B \in \mathcal{L}$ とする. A と B は互いに疎であることを限らぬので.

(3)' を使えば, $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ なら \mathcal{B} は π -システムなので, $A \cap B \in \mathcal{B}$ である.
 よって, λ -システムの性質より $A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{B}$, $B \setminus (A \cap B) \in \mathcal{B}$ である. また, (1), (2) より $\phi = (\Omega)^c \in \mathcal{B}$ であるので.

λ -システムの性質 (3)' より.

$$A \cup B = \underbrace{(A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B))}_{\text{互いに排反}} \cup (A \cap B) \cup \phi \cup \phi \dots$$

$\in \mathcal{B}$

である. 二つの場合 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$ なら, $(A_n \cap A_m = \phi$ (n ≠ m) と仮定する)
 $\bigcup_{n=1}^m A_n \in \mathcal{B}$ である. よって.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^m A_n \right)}_{A'_m \text{ とおく}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{A'_m}_{\mathcal{L} \text{ に含まれる}} \in \mathcal{B}$$

なお, 最後の $\bigcup_{m=1}^{\infty} A'_m \in \mathcal{B}$ は $A'_1 \subset A'_2 \subset \dots \in \mathcal{B}$ に性質 (3) を適用して.

以上より, \mathcal{B} は σ -加法族である. //

\mathcal{L} は π -システムになることを示す。前の Lemma $\mathcal{L}(P)$ は σ -代数だから
 \mathcal{L} は σ -代数になる。 $\mathcal{L}(P) \supset \mathcal{L}$ であり、かつ、 \mathcal{L} と $\mathcal{L}(P)$ の定義より、
 $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}(P)$ である。よって、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P)$ が従う。

$\mathcal{L}(P)$ が π -システムであることをこの証明:

$$\mathcal{G}_A := \{ B \in \mathcal{L}(P) \mid A \cap B \in \mathcal{L}(P) \} \quad \text{とする。}$$

(i) $A \in \mathcal{L}(P)$ なら \mathcal{G}_A は λ -システムである。

なせなら。

(1) $\Omega \in \mathcal{G}_A$ ($\because \Omega \cap A = A \in \mathcal{L}(P)$)

(2) $B \in \mathcal{G}_A$ なら、 $A \cap B \in \mathcal{L}(P)$ であり、 $A \in \mathcal{L}(P)$ であることに
 合わせて、 $A \setminus (A \cap B) = A \cap B^c \in \mathcal{L}(P)$ である。
 つまり、 $B^c \in \mathcal{G}_A$ である。

(3) $B_n \in \mathcal{G}_A$ は互いに排反であるとする。 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_A$ を示す。

$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$ であるから、 $B_n \in \mathcal{G}_A$ より、 $A \cap B_n \in \mathcal{L}(P)$
 である。したがって、 $(A \cap B_n)_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反であるので、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) \in \mathcal{L}(P). \quad \text{つまり、} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_A \quad \text{である。}$$

よって \mathcal{G}_A は λ -システムである。

(ii) $A \in \mathcal{P}$ なら $\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{G}_A$ である。

なせなら、まず $A \in \mathcal{L}(P)$ であることをこの (i) より \mathcal{G}_A は λ -システムであることに
 注意する。今、 \mathcal{P} は π -システムなので $\forall B \in \mathcal{P}$ は $B \cap A \in \mathcal{P}$ である。つまり、

$\forall B \in \mathcal{P}$ は $B \in \mathcal{G}_A$ である ($\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$)。よって \mathcal{G}_A は \mathcal{P} を含む λ -システムなので
 $\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{G}_A$ である。

↓

このことから、 $A \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{L}(P)$ に対し、 $A \cap B \in \mathcal{L}(P)$ である。

故に $A \in \mathcal{L}(P)$ かつ $B \in \mathcal{L}(P)$ なら、

(iii) $A \in \mathcal{L}(P)$ なら、 $\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{G}_A$ である。

なせなら、(ii) より、 $\forall B \in \mathcal{P}$ に対し、 $A \cap B \in \mathcal{L}(P)$ であることを示すこと
 により、 $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$ である。また (i) より $A \in \mathcal{L}(P)$ なら \mathcal{G}_A は λ -システムなので、

$\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{G}_A$ である。よって、 $A \in \mathcal{L}(P)$ なら、 $\forall B \in \mathcal{L}(P)$ に対し、 $A \cap B \in \mathcal{L}(P)$ である。
 つまり、 $\mathcal{L}(P)$ は π -システムである。 //

◦ Hopf の拡張定理.

こちらは長くなるので証明はしない.

スタートメントを叙述する.

Def (有限加法族)

$$\mathcal{A} \text{ が有限加法族} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \emptyset, \Omega \in \mathcal{A} \\ (2) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \\ (3) A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{m=1}^n A_m \in \mathcal{A} \end{cases}$$

有限和を指す //

Def (集合半代数) (半環は $\Omega \in S$ を要請しない)

$$S \text{ が集合半代数} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \emptyset, \Omega \in S \\ (2) S \text{ は } \pi\text{-システム} (A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S) \\ (3) A \in S \text{ なら, } A^c \text{ は有限個の互いに} \\ \text{排反な集合 } B_1, \dots, B_n \in S \text{ に分割できる:} \\ A^c = \bigcup_{i=1}^n B_i \text{ (} B_i \in S, B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j) \text{)} \end{cases}$$

//

例 $\Omega = \mathbb{R}$.

$S = \{(a, b] \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$ は集合半代数.

Lem.

集合半代数 S を含む最小の有限加法族は、 S の互いに排反な元達の有限和の族として表せる.

$$\mathcal{A}(S) = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid I: \text{有限}, B_i \in S, B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j, i, j \in I) \right\}$$

↑ S を含む最小の有限加法族 //

Thm.

\mathcal{S} : Ω 上の集合代数

$P: \mathcal{S} \rightarrow [0,1]$: \mathcal{S} 上の σ -加法的集合関数 \mathcal{C} 以下をみたす:

$$\left[\begin{array}{l} P(\Omega) = 1, A_n \in \mathcal{S} \text{ 且 } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S} \text{ の互いに排反なる } \\ P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{array} \right]$$

すると P の $\sigma(\mathcal{S})$ への拡張 P' が一意に存在し.

$$P' \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

($A_i \in \mathcal{S}, I$: 有限, $(A_i)_{i \in I}$ は互いに排反)

\mathcal{C} 与之らぬ. P' は $\sigma(\mathcal{S})$ 上の σ -加法的な確率測度となる.

Thm (Hoff の拡張定理)

有限加法族 \mathcal{A} 上の σ -加法的確率測度 P に対し, $\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ なる \mathcal{C}

$\sigma(\mathcal{A})$ への拡張が一意に存在する.

この一意性に Dynkin の定理を使う.

上の2つの Thm を合わせると次の定理を得る.

(構成法は次の10-2)

Thm

集合代数 \mathcal{S} 上の σ -加法的な集合関数 $P: \mathcal{S} \rightarrow [0,1]$ \mathcal{C} : $P(\Omega) = 1$ をみたすもの. $\sigma(\mathcal{S})$ 上に一意に拡張できる.

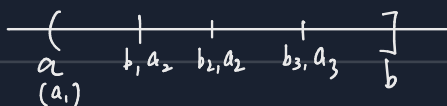
より正確には. この段 P が \mathcal{C} への Jordan 測度

例として $(0,1]$ 区間上のルベーグ測度は $\mathcal{S} = \{(a,b] \mid 0 \leq a < b \leq 1\}$ 上で

σ -加法的に存在することを示せる. かつ $\mu((a,b]) = b-a$ とおくと.

$$(a,b] = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \quad (\text{互に disjoint}) \text{ に対し}$$

$$\mu((a,b]) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu((a_i, b_i])$$



$$\text{かつ } b-a = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$$

から示せる. かつ $(0,1], \mathcal{B}((0,1])$ 上の確率測度 μ' \mathcal{C} :

$$\mu'((0,1]) = 1, \mu'((a,b]) = \mu((a,b]) = b-a$$

であるものが. 唯一存在することから従う. ($\because \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}((0,1])$)

$\sigma(\mathcal{A})$ 上の確率測度の構成方法 (概要)

任意の部分集合 $A \subset \Omega$ に対し, P より定まる外測度 P^* を以下のように定める:

$$P^*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \mid B_i \in \mathcal{S}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right\}.$$

可算無限個.

(ここで, 有限和とした場合, 7頁) $P^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m P(B_i) \mid B_i \in \mathcal{S}, A \subset \bigcup_{i=1}^m B_i, m \geq 1 \right\}$ とすると, 望まぬ拡張が得られる.

例として, $\Omega = [0, 1]$, $P: [0, 1]$ 上の一様分布, $\mathcal{S}: \text{半開区間全体}$,

とすると, 有理数全体 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ に対し, $P^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$ と

なることが, かつ $P^*(\mathbb{Q}^c \cap [0, 1]) = 1$ である. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ を "測れず" .

この場合, $P^*(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$ とならなければ.

→ 可算無限和を考慮すること. (これは0になる)

ここで,

$$\mathcal{D} := \left\{ D \subset \Omega \mid P^*(D) + P^*(D^c) = 1 \right\}$$

とすると, (内測度と外測度が一致する集合)

とすると, 次の成り立ち?

LEM

1. \mathcal{D} は σ -代数族

2. P^* の \mathcal{D} の制限は (Ω, \mathcal{D}) 上の確率測度になっている.

Proof

証明の前は P^* が連続性を満たすことを認める:

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset \Omega$ に対し, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ としたとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^*(A_n) = P^*(A)$$

である.

1. $p^*(\Omega) = 1, p^*(\emptyset) = 0$ は常に確率測度である。

よって $p^*(\Omega) + p^*(\emptyset) = 1$ である。

$\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$

である。

2. $D \in \mathcal{A}$ なら定義より

$$p^*(D) + p^*(D^c) = 1$$

なので、 $p^*(D^c) + p^*((D^c)^c) = 1$ である。

よって $D^c \in \mathcal{A}$ である。

3. \mathcal{A} は有限可法のである。 p^* も \mathcal{A} 上で有限可法のであることを示す。

まず、 $D_1, D_2 \in \mathcal{A}$ なら、

$$p^*(D_1 \cup D_2) + p^*(D_1 \cap D_2) \leq p^*(D_1) + p^*(D_2) \quad (1)$$

$$p^*((D_1 \cup D_2)^c) + p^*((D_1 \cap D_2)^c) \leq p^*(D_1^c) + p^*(D_2^c) \quad (2)$$

が成り立つ。

(これは非自明なため、成り立つと認める)

これを辺々足すと、

$$p^*(D_1 \cup D_2) + p^*(D_1 \cap D_2) + p^*((D_1 \cup D_2)^c) + p^*((D_1 \cap D_2)^c)$$

$$\leq p^*(D_1) + p^*(D_2) + p^*(D_1^c) + p^*(D_2^c)$$

$$= 1 + 1 = 2 \quad (\because D_1, D_2 \in \mathcal{A})$$

一方、 $p^*(A) + p^*(A^c) \geq 1$ は常に成り立つのである。

左辺 ≥ 2 は常に成り立つ。よって、特に、

$$p^*(D_1 \cup D_2) + p^*((D_1 \cup D_2)^c) = 1$$

$$p^*(D_1 \cap D_2) + p^*((D_1 \cap D_2)^c) = 1$$

である。これから、

$$D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \in \mathcal{A}$$

である。また、(1), (2) の等号が成り立つことは上の議論からわかる。

よって、 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ならば $D_1, D_2 \in \mathcal{A}$ に対し、

$$p^*(D_1 \cup D_2) = p^*(D_1) + p^*(D_2)$$

を得る。

つまり、 \mathcal{D} は有限加法的である、 $P^* \in \mathcal{D}$ 上に有限加法性を与える。

あとは、 \mathcal{D} が "単調族" であることを示せば、 \mathcal{D} は σ -加法族であることを示す (単調族定理: 単調族 \Rightarrow 有限加法的 $\Rightarrow \sigma$ -加法族)

ここで、単調族とは、

(a) $A_i \in \mathcal{D}$, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ のとき、 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

(b) $A_i \in \mathcal{D}$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ のとき $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$

を満たす集合族である。

今 \mathcal{D} は有限加法族なので (a) が満たされるから (b) も成立する。

よって (a) を示せば良い。

つまり、 $D_n \in \mathcal{D}$ と $D_n \nearrow D$ のとき ($D_1 \subset D_2 \subset \dots$ から $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$ のとき $D_n \nearrow D$ と書く)

まず、証明の冒頭で述べた P^* の単調性より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^*(D_n) = P^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = P^*(D)$$

である。

一方、

$$P^*(D^c) = P^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^c\right) \leq P^*(D_m^c) \quad (\forall m)$$

である。

$$1 \leq P^*(D) + P^*(D^c)$$

なので、

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P^*(D_n) + P^*(D_m^c)$$

である。 m について極限を取れば

$$1 \leq P^*(D) + P^*(D^c)$$

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P^*(D_n) + \lim_{m \rightarrow \infty} P^*(D_m^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^*(D_n) + P^*(D_n^c)) \\ &= 1 \quad (\because D_n \in \mathcal{D}, \forall n) \end{aligned}$$

を得る。このことから $P^*(D) + P^*(D^c) = 1$ なので、 $D \in \mathcal{D}$ である。

よって、 \mathcal{D} は単調族である、単調族定理より σ -加法族。

あとは P^* の σ -加法性を示せば良い。

$D_n \in \mathcal{A}$ ($n=1, 2, \dots$) を、互いに排反な集合列とする。

↓ 次へ

$$\begin{aligned}
 P^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) &= P^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^n D_k \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P^* \left(\bigcup_{k=1}^n D_k \right) \quad (\because P^* \text{の単調性より})
 \end{aligned}$$

さらに、 P^* は有限加法的であることはすでに示した。この

$$P^* \left(\bigcup_{k=1}^n D_k \right) = \sum_{k=1}^n P^*(D_k)$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 P^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P^*(D_k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} P^*(D_k)
 \end{aligned}$$

である。

P^* の構成法より、

$$(1) \quad S \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$$

$$(2) \quad P^*(A) = P(A) \quad (\forall A \in S)$$

であることは確認できる。

\mathcal{F} は σ -加法族なので、 $\sigma(S) \subset \mathcal{F}$ である。

P^* は \mathcal{F} 上の確率測度なので、 $\forall A \in \sigma(S)$ に制限した $P^*|_{\sigma(S)}$ も $\sigma(S)$ 上の確率測度になる。

さらに、 π - λ 定理より、そのような拡張は一意的である。

$(\Omega, \sigma(S), P^*|_{\sigma(S)})$ は P の $\sigma(S)$ への一意的な拡張である。