

確率数理要論10

マルチンゲールの続き.

確率積分 $\int f_t dB_t$ は連続な セミマルチンゲール を用いた確率積分まで拡張できる.

(参考) X : 連続セミマルチンゲール

$$\Leftrightarrow X = X_0 + M + A$$

X_0 : \mathcal{F}_0 -可測

M : 連続な局所二乗可積分マルチンゲール $M_0 = 0$

- M は連続

- $\exists \tau_1 < \tau_2 < \dots \rightarrow \infty$ (停止時刻の列)

$M^{\tau_j} = (M_{t \wedge \tau_j})_t$ は二乗可積分マルチンゲールの列

$$\sup_{t \geq 0} E[(M_t^{\tau_j})^2] < \infty$$

A : 連続な有界変動過程 ($A_0 = 0$, $t \mapsto A_t(\omega)$ は有界変動 on $[0, T]$ \mathcal{F}_t -適合 each $(T > 0)$)

$$\int f_t dX_t := \sum_{j=0}^J u_j (X_{\tau_{j+1}} - X_{\tau_j}) \quad \text{for} \quad \sqrt{A} = \sum_{j=0}^J u_j \mathbb{1}_{[\tau_j, \tau_{j+1})}(t):$$

単過程

ここでマルチンゲールには確率積分について軽く説明する.

$(M_t)_{a \leq t \leq b}$: 二乗可積分マルチンゲール

$$\hookrightarrow \sup_{a \leq t \leq b} E[M_t^2] < \infty$$

かつ

$t \mapsto M_t(\omega)$ は càdlàg (右連続かつ左極限が存在).

とある.

\hookrightarrow 2次元

Jensenの不等式より $(M_t^2)_t$ は martingale となる。

より、連続時間版の Doob の分解より、

ある可予測、右連続な増加過程 $(A_t)_t$ が存在し、

$\hookrightarrow (s, t] \times A$ ($A \in \mathcal{F}_s$),

$\hookrightarrow \mathcal{F}_t$ -適応, $A_0 = 0$, $t \mapsto A_t(\omega)$ は非減少

$\{s\} \times B$ ($B \in \mathcal{F}_s$),

2. 生成する $[a, b]$ 上の最小の σ -代数 \mathcal{P} に対し?

$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ は可測になる確率過程

$M_t^2 - A_t$ は martingale となる。

この $A_t \in \langle M \rangle_t$ と書く。(compensator, 補償子と言う)

例: $\bullet M_t = B_t$ (ブラウン運動)

$$\Rightarrow \langle M \rangle_t = t$$

実際

$$E[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s]$$

$$= E[(B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2 - t | \mathcal{F}_s]$$

$$= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s$$

$\bullet M_t = N_t - \lambda t$ ただし N_t は強度 λ の定率ポアソン過程

$$\Rightarrow \langle M \rangle_t = \lambda t$$

Def

$\mathcal{L}^2([a, b], M)$ を全ての可予測かつ $E[\int_a^b |f_t|^2 d\langle M \rangle_t] < \infty$

を満たす確率過程の集合とする。

$(f_t)_t \in \mathcal{L}^2([a, b], M)$ を

単過程とする:

$$f_t(\omega) = \sum_{i=1}^n e_i(\omega) \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(\omega).$$

Riemann-Stieltjes 積分:

$$\sum_{k=1}^n f_{t_k}^2 (\langle M \rangle_{t_k} - \langle M \rangle_{t_{k-1}})$$

の極限。ただし、 $(t_k)_{k=0}^n$ は $[a, b]$ の n 等分点。

このとき、この M による確率積分を

$$\int f_t dM_t := \sum_{i=1}^n e_i(\omega) (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})$$

と定める。

Thm (等長性)

上記の $(f_t)_t$ は f に対し、

$$E \left[\left(\int_a^b f_t dM_t \right)^2 \right] = E \left[\int_a^b f_t^2 d\langle M \rangle_t \right]$$

//

* $M_t = B_t$ のとき $\langle M \rangle_t = t$ であること思い出され、

これは以前に紹介した伊藤の等長性の一般化になっていること
がわかる。

このことから一般の $f \in L^2([a, b], M)$ に対しては単過程の列 $f^{(n)} \in L^2([a, b], M)$

とあり

$$E \left[\int_a^b (f_t - f_t^{(n)})^2 d\langle M \rangle_t \right] \rightarrow 0$$

に対してその ε を取ると、

$$\int_a^b f_t dM_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_t^{(n)} dM_t$$

と定義する。

この後述べる伊藤の公式も $\langle M \rangle_t$ を \mathbb{R}^d 上のマルチンゲールに
拡張することからできる。

伊藤の公式と確率微分方程式

$(B_t)_{t \geq 0}$: Brown 運動

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$: filtration

$(B_t)_{t \geq 0}$ は (\mathcal{F}_t) -適合 Brown 運動. $B_s - B_t$ は \mathcal{F}_t と独立
($s \geq t$)

Def (伊藤過程, Itô process)

$$(v_t)_t \in L^2([0, T])$$

$$(u_t)_t : (\mathcal{F}_t)\text{-適合で } \int_0^T |u_t| dt < \infty \text{ (a.s.)} \quad (u_t \in L([0, T]) \text{ と書く})$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s \quad (t \in [0, T])$$

と書ける時, $(X_t)_{t \in [0, T]}$ を伊藤過程と言う.

形式的に, X_t が伊藤過程の時,

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t$$

と書く. (dX_t の表記は積分(はじめ)の意味がある.)

\mathcal{F}_t -適合な $(f_t)_t$ に対し,

$$\int_0^t f_s dX_s := \int_0^t f_s u_s ds + \int_0^t f_s v_s dB_s$$

とある. 2nd,

$$f_t dX_t = f_t u_t dt + f_t v_t dB_t$$

と書く. (先のセミナー424-ルによる積分と整合性のある定義になっている)

Thm (伊藤の公式, Ito's formula)

$(X_t)_{t \in [0, T]}$: 伊藤過程

$\varphi(t, x) \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ (注: $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ が存在し連続)

$(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t) v_t)_{t \in [0, T]} \in L^2([0, T])$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(T, X_T) &= \varphi(0, X_0) + \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X_t) dt \\ &\quad + \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t) u_t dt + \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t) v_t dB_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X_t) v_t^2 dt \\ &\quad \text{(二項ブラウン運動特有の項)} \end{aligned}$$

$Y_t = \varphi(t, X_t)$ とする.

$$dY_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X_t) v_t^2 dt$$

と書ける.

この項は、合成関数の微分の開き.

直観:

dY_t は $Y_{t+\varepsilon} - Y_t$ なる微小変化を表すと考えられる.

テイラー展開より

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t) dX_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, X_t) dt^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}(t, X_t) dt dX_t \right) \\ &\quad + (\text{higher order}) \end{aligned}$$

となる.

問題は2次の項で、 $\Rightarrow (dX_t = u_t dt + v_t dB_t)$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} (u_t^2 dt^2 + 2u_t v_t dt dB_t + v_t^2 (dB_t)^2) \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} (u_t dt^2 + v_t dB_t dt) \right] \end{aligned}$$

となる.

こゝで、以下の1-1を あてはめろ:

$$\left\{ \begin{array}{l} dt^2 = 0 \\ dt dB_t = 0 \\ dB_t^2 = dt \end{array} \right. \quad \text{(伊藤の公式)}$$

すなわち、

$$(dX_t)^2 = v_t^2 dt$$

となすので、

$$dY_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} v_t^2 dt$$

を得る。

$$(E[(B_{t+\varepsilon} - B_t)^2]) = \varepsilon \quad \text{ここで、\(\varepsilon\)} \rightarrow dt \text{ とおくと、}$$

ε^2 は無視する。

(略証)

φ が連続 2回微分可能かつ導関数有界であるとする。

また、 $v_s(\omega)$ は (s, ω) に依らず一定であるとする。

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ を等分割 ($t_i = \frac{t}{n} i$) とする。

$$\varphi(t, X_t) - \varphi(0, X_0) = \sum_{i=1}^n [\varphi(t_i, X_{t_i}) - \varphi(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})]$$

である。テイラー展開より、

$$\begin{aligned} & \varphi(t_i, X_{t_i}) - \varphi(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \\ &= \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})}_{(1)} (t_i - t_{i-1}) + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})}_{(2)} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t_i, \bar{z}_i)}_{(3)} (t_i - t_{i-1})^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_i, \bar{z}_i)}_{(4)} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \\ &+ \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}(t_i, \bar{z}_i)}_{(5)} (t_i - t_{i-1}) (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \end{aligned}$$

(ただし、 t_i, \bar{z}_i は $[t_i, t_{i-1}]$ および $[X_{t_i}, X_{t_{i-1}}]$ の中点)

(a.s.)

①: $(X_t)_t$ は連続かつ $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ は有界連続なので、

$$\sum_{i=1}^n \text{①} \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, X_s) ds \quad \text{(a.s.)}$$

②: $X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} u_s ds}_{\Delta U_i} + \underbrace{\int_{t_{i-1}}^{t_i} v_s dB_s}_{\Delta V_i}$ であり $\varepsilon \Sigma$ 思ひ出す。

$$\sum_{i=1}^n \textcircled{2} = \sum_{i=1}^n \Delta U_i \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n \Delta V_i \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})$$

であり φ は $u_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \rightarrow u_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) (v_s)$ あり $(\because \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ は有界, $v_s \in L^2)$

$$\sum_{i=1}^n v_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(s) \rightarrow v_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) \quad (\text{in } L^2([0, T]))$$

S の関数として

たのて。

$$\sum_{i=1}^n \textcircled{2} \rightarrow \int_0^T u_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) ds + \int_0^T v_s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) dB_s$$

$\xrightarrow{L_1 \text{ 有界} \Rightarrow \text{優収束}} \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s, X_s) dX_s$ $\leftarrow \because \text{伊藤の等価性}$

③: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$ は有界なて。 $\sum_{i=1}^n \textcircled{3} \leq \underbrace{\max_{0 \leq s \leq T} \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(s, X_s) \right|}_{\text{有界}} \underbrace{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2}_{O(\frac{1}{n^2})} \rightarrow 0$

$\neq 0 \quad (dt)^2 = 0$

⑤:

$(X_t)_t$ は a.s. で連続なて。 $\max_{1 \leq i \leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \rightarrow 0$ (a.s.)

さらに $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ は有界なて。

$$\sum_{i=1}^n \textcircled{5} \leq \underbrace{\max_{1 \leq i \leq n} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{\max_{0 \leq s \leq T} \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, X_s) \right|}_{< \infty} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n |t_i - t_{i-1}|}_{\uparrow T} \rightarrow 0 \quad (\text{a.s.})$$

④: $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 = (\Delta U_i)^2 + (\Delta V_i)^2 + 2 \Delta U_i \Delta V_i$ であり φ は

$(\Delta U_i)^2, \Delta U_i \Delta V_i$ の項は上と同様にして $\sum_{i=1}^n (\dots) \rightarrow 0$ (a.s.) なる言え。

$(\Delta V_i)^2$ の項は

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} v_s dB_s \right)^2$$

$$\approx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) v_{t_{i-1}}^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \quad (\because \text{伊藤の等価性, } v_s \text{ は定数})$$

であり。

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) v_{t_{i-1}}^2 \left[\underbrace{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2}_{N(0, \frac{t_i}{n})} - (t_i - t_{i-1}) \right] \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{大数の法則}}} 0 \quad (\text{二次平均収束})$$

b)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) v_{t_{i-1}}^2 (t_i - t_{i-1}) \longrightarrow \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(s, X_s) v_s^2 ds \quad (\text{a.f.})$$

(∵ Riemann 積分の定義)

よって示す。 //

Ex.

$$dX_t = B_t dB_t \quad (v_t = B_t, u_t = 0 \text{ とおす})$$

$\varphi(t, x) = x^2 \in C^2$. 伊藤の公式を当てはめる。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} d(B_t^2) &= 2B_t dB_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (dB_t)^2 \\ &= 2B_t dB_t + dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_t^2 = \underbrace{B_0}_{0} + \underbrace{2 \int_0^t B_s dB_s}_{X_t} + \underbrace{\int_0^t 1 ds}_t$$

$$\Rightarrow X_t = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t \quad (\text{前回の例})$$

Ex. (Black-Scholes モデル)

$$Y_t = c \exp(\mu t + \sigma B_t)$$

$$X_t = \mu t + \sigma B_t$$

$$\varphi(t, x) = c e^x \quad \text{とおく。} \quad Y_t = \varphi(t, X_t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = c e^x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{より、伊藤の公式より}$$

$$\begin{aligned} Y_t &= c + \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t Y_s \overbrace{\sigma^2 ds}^{(dX_s)^2} \\ &= c + \int_0^t \mu Y_s ds + \int_0^t \sigma Y_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 Y_s ds \end{aligned}$$

$Y_s > 0$ かつ、 $\int_0^t \sigma Y_s dB_s$ は martingale なのだから

$$Y_t \text{ が martingale} \iff \mu + \frac{\sigma^2}{2} = 0$$

一般に解析が可能になる。

※ 株価を martingale とおすと

- 多次元の場合

Thm (多次元版伊藤の公式)

$\begin{pmatrix} B_t^{(1)} \\ \vdots \\ B_t^{(m)} \end{pmatrix} \in \text{独立なBM}$

$B_t = ((B_t^{(i)})_{t \geq 0})_{j=1}^m = m$ -次元 Brown 運動

$(u_t^{(i)})_t \in L([0, T])$, $(v_t^{(i,j)})_t \in L^2([0, T])$ ($\forall i, j \in [m]$)

$$dX_t = u_t dt + v_t dB_t$$

($dX_t^{(i)} = u_t^{(i)} dt + \sum_{j=1}^m v_t^{(i,j)} dB_t^{(j)}$ の意味)

と書ける時、 $X_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)})^T \in d$ -次元伊藤過程と呼ぶ。

$\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_t) v_t^{(i,j)})_t \in L^2([0, T])$ ($\forall i, j$),

$Y_t = \varphi(X_t)$ のとき、

\Rightarrow

$$dY_t = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(X_t) dX_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) \left(\sum_{k=1}^m \overbrace{v_t^{(i,k)} v_t^{(j,k)}}^{\text{共通}} \right) dt$$

Ex.

X_t, Y_t : 伊藤過程 ($dX_t = a_t dt + \sigma_t^{(1)} dB_t$, $dY_t = c_t dt + \sigma_t^{(2)} dB_t$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(X_t Y_t) &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \frac{1}{2} (dX_t dY_t + dY_t dX_t) \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + \underline{\underline{\sigma_t^{(1)} \sigma_t^{(2)} dt}} \end{aligned}$$

よって、

$$\int X_t dY_t = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int Y_t dX_t - \int \sigma_t^{(1)} \sigma_t^{(2)} dt$$

(部分積分の公式)

① 確率微分方程式

b_t, σ_t = 可測関数 s.t. $b_t(X_t) \in \mathcal{L}([0, T])$, $\sigma_t(X_t) \in \mathcal{L}^2([0, T])$

$X_0 = x_0$ (定数),

$$dX_t = \underbrace{b_t(X_t)}_{\text{ドリフト係数}} dt + \underbrace{\sigma_t(X_t)}_{\text{拡散係数}} dB_t \quad : \text{確率微分方程式} \\ (\text{Stochastic differential equation; SDE})$$

とめた時 $(X_t)_t$ を求める問題を考えよう.

★ X_t の振る舞いは自身の二山までの振る舞いで決定される.

SDEは右辺第2項がなければ通常の(一階線形)微分方程式になる.

Def

\mathcal{F}_t -適合な $(X_t)_t$ が SDE をみたす時、(弱)解 (weak solution) とする。
この時、拡散過程 (diffusion process) とも呼ばれる。

$(X_t)_t$ が SDE をみたし、かつ $(B_t)_t$ の生成過程 $(\mathcal{F}_t^B)_t$ に適合してなるなら強解と言う。

Ex. (Ornstein-Uhlenbeck process)

$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ に対し

$$\text{SDE: } dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t$$

の解を Ornstein-Uhlenbeck 過程と言う。(OU-過程)

$e^{-\mu t} X_t$ に伊藤の公式を使う ($\varphi(t, x) = e^{-\mu t} x$) と、

$$\begin{aligned} d(e^{-\mu t} X_t) &= -\mu e^{-\mu t} X_t dt + e^{-\mu t} dX_t \\ &= \cancel{-\mu e^{-\mu t} X_t dt} + e^{-\mu t} (\cancel{\mu X_t dt} + \sigma dB_t) \\ &= \sigma e^{-\mu t} dB_t \end{aligned}$$

よって、

$$e^{-\mu t} X_t = X_0 + \int_0^t \sigma e^{-\mu s} dB_s$$

$$\Rightarrow X_t = e^{\mu t} X_0 + \int_0^t \sigma e^{\mu(t-s)} dB_s$$

$\mu < 0$ のとき、原点に戻りたがりに働くことになる。

Ex.

Black-Scholes モデル

$$\text{SDE: } dY_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) Y_t dt + \sigma Y_t dB_t$$

の解 (存在) 2つ.

幾何 Brown 運動 とも呼ばれる.

Thm

ある $c > 0$ があつて、 $\forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|b_t(x) - b_t(y)| \leq c|x - y|, \quad |\sigma_t(x) - \sigma_t(y)| \leq c|x - y| \quad \dots (1)$$

$$|b_t(x)| \leq c(1 + |x|), \quad |\sigma_t(x)| \leq c(1 + |x|) \quad \dots (2)$$

が成り立つとき、SDE は一意の強解を持つ。

(一意の意味は、2つの解 X_t, Y_t に対し、
 $P(X_t = Y_t (\forall t \in [0, T])) = 1$ が成り立つこと。)

(1): Lipschitz 連続性

(2): 線形増大性

//