確率数理要論11

○ Girsanovの定理

Thm

- $\mu = (\mu_t(\omega))_t \in \mathcal{L}([0,T])$, $\sigma = (\sigma_t(\omega))_t \in \mathcal{L}^2([0,T])$
- $\frac{\mu}{\sigma} = \left(\frac{\mu_t(\omega)}{\sigma_t(\omega)}\right)_t \in \mathcal{L}^2([0,T])$

とする.

$$dX_t = \mu_t(\omega)\,dt + \sigma_t(\omega)\,dB_t \quad : \text{ドリフトあり}$$
$$d\tilde{X}_t = \sigma_t(\omega)\,dB_t \quad : \text{ドリフトなし}$$

また、

$$M_T(\omega) = \exp\left(-\int_0^T \frac{\mu_t}{\sigma_t^2}dX_t + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\mu_t^2}{\sigma_t^2}dt\right)$$
$$= \exp\left(-\int_0^T \frac{\mu_t}{\sigma_t}dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\mu_t^2}{\sigma_t^2}dt\right)$$

とする.

$E[M_T]=1$ であるとき、確率測度 Q を P に対して絶対連続で

$\frac{dQ}{dP}(\omega) = M_T(\omega)$ であるものとする. (Qが確率測度になることは保証できる.)

つまり, $Q(A) = E[\mathbb{1}_A M_T]$ $(A \in \mathcal{F})$ とする.

このとき、Qの下での Xの分布は Pの下での$\tilde{X}$の分布と等しい.

特に, Qの下で $(X_t)_t$ は マルチンゲールとなる. //

- M_T は QのPに対するRadon-Nikodym微分である.
- 1次元Gauss分布における以下の関係を無限次元に拡張したものと考えられる:

$$p(x\mid\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{に対して}$$

$$\frac{\overset{Q}{p(x\mid 0,\sigma^2)}}{\underset{P}{p(x\mid\mu,\sigma^2)}} = \exp\left(\frac{\mu^2-2\mu x}{2\sigma^2}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{\mu^2+2\mu(x-\mu)}{2\sigma^2}\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}\underbrace{\frac{(x-\mu)}{\sigma}}_{}-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)$$

Pのもとで標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

・$E[M_T]=1$ であるための条件としては，

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\mu_t}{\sigma_t}\right)^2dt\right)\right]<\infty \qquad (\text{Novikov条件})$$

が知られている．

<u>Cor</u>

$h\in\mathcal{L}^2([0,T])$ に対し，$M_T(\omega)=\exp\left(\int_0^T h_t(\omega)\,dB_t-\frac{1}{2}\int_0^T h_t(\omega)^2dt\right)$
が $E[M_T]=1$ をみたすとする．

$$W_t = B_t - \int_0^t h_s\,ds \qquad (0\leq t\leq T)$$

は，$dQ=M_T\,dP$ に関して Brown 運動となる． //

※ $E[M_T]=1$ について：

$$M_t = \exp(\underbrace{\int_0^t h_s\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t h_s^2\,ds}_{X_t\text{ とおく．}}) \quad \text{とおくと，}$$

伊藤の補題より

$$\begin{aligned}
dM_t &= \exp(X_t)\,dX_t+\frac{1}{2}\exp(X_t)(dX_t)^2\\
&= M_t\,dX_t+\frac{1}{2}M_t h_t^2\,dt\\
&= M_t\left(\cancel{-\frac{1}{2}h_t^2dt}+h_t\,dB_t\cancel{+\frac{1}{2}h_t^2dt}\right)\\
&= M_t h_t\,dB_t
\end{aligned}$$

である．$M_0=1$ より

$$M_t = 1+\int_0^t M_s h_s\,dB_s$$

で，適当な可積分条件のもと，第2項はマルチンゲールなので，
$(M_t)_t$ もマルチンゲール．特に $E[M_T]=1$ である．
もっとも，$(M_t)_t\in\mathcal{L}^2$ であることはわからないし，$\exp(\cdot)$ は非有界なので
伊藤の補題が使えるかもわからない．そこで Novikov条件等を用いて
上記の計算を正当化する．

Girsanov の定理はヨーロピアン・オプションの適性な価格付け
に用いられている．
(複製ポートフォリオ)

$\Rightarrow$ <u>Black-Scholes-Merton の方程式</u>

(Girsanovの定理の略証)　σ_t が w に依存しないと仮定して示す.

$$M_t e^{i\xi X_t + \frac{\xi^2}{2}\underbrace{\int_0^t \sigma_s^2 ds}_{=v_t \text{とおく.}}}$$ が P のもとで Martingale であることを示す.

($\xi \in \mathbb{R}$ は任意)

伊藤の公式より

$$
\begin{aligned}
&M_t e^{i\xi X_t + \frac{\xi^2}{2} v_t} \\
&= 1 + \int_0^t i\xi e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} \cdot M_s \underbrace{dX_s}_{\sigma_s dB_s + \mu_s ds} + \int_0^t \frac{\xi^2}{2}\sigma_s^2 e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} \cdot M_s ds \\
&\quad + \int_0^t e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} M_s \left(-\frac{\mu_s}{\sigma_s} dB_s - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 ds \right) \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{2}(i\xi)^2 e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} \cdot M_s \cdot (dX_s)^2 \quad (= \sigma_s^2 \cdot ds) \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{2} e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} \cdot M_s \cdot \left(\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)^2 \cdot ds \\
&\quad + \int_0^t e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} \cdot M_s \cdot \left[\sigma_s \cdot \left(-\frac{\mu_s}{\sigma_s}\right)\right] \cdot ds \\
&= 1 + \int_0^t \left(i\xi\sigma_s - \frac{\mu_s}{\sigma_s}\right) dB_s \quad \leftarrow \text{マルチンゲール}
\end{aligned}
$$

よって

$$E_P\left[M_t e^{i\xi X_t + \frac{\xi^2}{2} v_t} \middle| \mathcal{F}_s\right] = M_s e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s}.$$

特に $\forall A \in \mathcal{F}_s$ に対し

$$
\begin{aligned}
E_Q\left[e^{i\xi X_t + \frac{\xi^2}{2} v_t} \cdot 1_A\right] &= E_P\left[M_t e^{i\xi X_t + \frac{\xi^2}{2} v_t} 1_A\right] \\
&= E_P\left[M_s e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} 1_A\right] \\
&= E_Q\left[e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} 1_A\right]
\end{aligned}
$$

よって. $e^{i\xi X_t + \frac{\xi^2}{2} v_t}$ は Q において Martingale.

すると.

$$E_Q\left[e^{i\xi X_t + \frac{\xi^2}{2} v_t} \middle| \mathcal{F}_s\right] = e^{i\xi X_s + \frac{\xi^2}{2} v_s} \quad (a.s)$$

$$\Rightarrow E_Q\left[e^{i\xi(X_t - X_s)} \middle| \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{\xi^2}{2}(v_t - v_s)} = e^{-\frac{\xi^2}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds}$$

これはすなわち $X_t - X_s$ は Q のもと平均0, 分散 $\int_0^t \sigma_s^2 ds$ の正規分布に従う.

X_t が加法過程であることから Levy-伊藤の分解より. X_t は P のもとでの $\tilde{X}_t$ と分布が等しい. //

生成作用素と後向き・前向き方程式

$x \in \mathbb{R}$ に対して、時間的に一様な拡散過程

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

を考える。b, σ は Lipschitz 連続かつ線形増大とする。

Def（生成作用素）

$$Af(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{E[f(X_\varepsilon^x)] - f(x)}{\varepsilon}$$

で定まる A を X_t^x の生成作用素という。

※ X_t は時間的に一様なので、A は t に依存しない。
X_t の分布を知りたい $\longrightarrow$ 任意の関数 f の期待値の性質を調べる。
（c.f. 特性関数，Portmanteau の定理）

Lem

$f \in C^2(\mathbb{R})$
τ: 停止時刻 s.t. $E_x[\tau] < \infty$　$({}^\forall x \in \mathbb{R})$

↖ 初期値 $X_0 = x$ で条件付け

$\Longrightarrow$ $E_x[f(X_\tau^x)]$

$$= f(x) + E_x\left[\int_0^\tau \left(b(X_t)\frac{\partial f}{\partial x}(X_t^x) + \frac{1}{2}\sigma(X_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t^x)\right)dt\right]$$

$(x \in \mathbb{R})$ //

（略証）

$Y_t = f(X_t)$ とすると、

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial x}(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t)\sigma^2(X_t)dt \quad \text{（伊藤の公式）}$$

$$\Longrightarrow Y_t - \underbrace{Y_0}_{f(x)} = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s)b(X_s)ds + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s)\sigma(X_s)dB_s}_{\text{マルチンゲール：期待値0, 任意抽出定理}}$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s)\sigma^2(X_s)ds$$

$t=\tau$ を代入して期待値をとれば、確率積分の martingale 性と任意抽出定理より右辺第2項 $=0$ なので O.K. //

Thm

$f \in C^2(\mathbb{R})$ に対し、

$$Af(x) = b(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)$$ //

(∵) Lem より明らか。 //

多次元の拡散過程に対しても Lem は成り立ち、

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sum_{k=1}^{m}\sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \text{—}(*)$$

- Dirichlet 境界値問題への応用

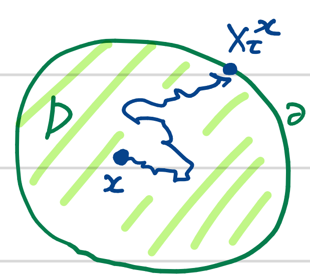
D: $\mathbb{R}^d$ 内の有界で連結な集合, 境界 ∂D は十分なめらかとする。

偏微分方程式:
$$\begin{cases} Af(x) = 0 & (x \in D) \\ f(x) = \phi(x) & (x \in \partial D) \end{cases}$$
(Af は(*)で与えた形)

を考える。X_t^x を対応する拡散過程として

$$\tau(\omega) = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^x(\omega) \in \partial D\}$$

とする。



Thm

$E[\tau] < \infty$ とする。この時、境界値問題の解 f が存在するなら

$$f(x) = E_x[\phi(X_\tau)]$$

で表される。また、その解は一意である。 //

(略証)

← 例えば $u(x) = E_x[\phi(X_\tau^x)]$

先の Lem より. u を $u(x)=\phi(x)$ $(x\in\partial D)$ をみたす関数とすると,

$$E_x[\phi(X_\tau)] = u(x) + E_x\left[\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right].$$

x を D の内点とする.

$$\underset{x\text{の関数とみなす.}}{\underline{A\,E_x[\phi(X_\tau)]}} = Au(x) + A\,E_x\left[\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right]$$

$$= Au(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{E_x\left[E_{X_\varepsilon^x}\left[\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right]\right] - E_x\left[\int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right]\right\}$$

$$= Au(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{E_x\left[\int_\varepsilon^\tau Au(X_t)\,dt - \int_0^\tau Au(X_t)\,dt\right]\right\}$$

$$= Au(x) - E_x[Au(x)] = Au(x) - Au(x) = 0$$

//

Kolmogorov の後向き・前向き方程式

$$dX_t = b_t(X_t)\,dt + \sigma_t(X_t)\,dB_t \qquad (\text{一次元, 時間に非一様})$$

$\Longrightarrow$ 対応する生成作用素

$$A_t = b_t(x)\frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{\frac{\sigma_t^2(x)}{2}}_{\substack{\shortparallel\\ a_t(x)\text{ とする.}}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

・ X_t は Markov 過程になる.

$\Longrightarrow$ $X_s = x$ の下での X_t の条件付確率密度を

$$p(t,y\,|\,s,x) \qquad (\text{推移確率密度})$$

とする.

Chapman-Kolmogorov の方程式

$$p(u,z\,|\,s,x) = \int p(u,z\,|\,t,y)\,p(t,y\,|\,s,x)\,dy \qquad (x,z\in\mathbb{R},\ u>t>s\geq 0)$$

Thm

$a_t(x), b_t(x)$ は t について連続で、x について Lipschitz 連続かつ線形増大であるとする。また、$a_t(x) \geq \varepsilon > 0$ $(0 \leq {}^\forall t \leq T, {}^\forall x \in \mathbb{R})$ とする。
さらに、$\frac{\partial b_t}{\partial x}, \frac{\partial a_t}{\partial x}, \frac{\partial^2 a_t}{\partial x^2}$ も Lipschitz 連続かつ線形増大であるとする。

すると、p は以下をみたす唯一の解である：

後向き方程式：$$\frac{\partial p}{\partial s}(t,y|s,x) = -b_s(x)\frac{\partial p}{\partial x}(t,y|s,x) - a_s(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t,y|s,x) = -A_s p(t,y|s,\cdot)|_x$$

前向き方程式：$$\frac{\partial p}{\partial t}(t,y|s,x) = -\frac{\partial}{\partial y}\{b_t(y)p(t,y|s,x)\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{a_t(y)p(t,y|s,x)\}$$
$$= A_t^* p(t,\cdot|s,x)|_y \quad (A_t \text{の共役作用素})$$

Fokker-Plank方程式とも言う

かつ $\lim_{t \to s} p(t,y|s,x) = \delta_x(y)$ (Dirac のデルタ関数)

(略証)

$\theta(t) = \int f(y)p(t,y|s,x)dy$ とする。($f \in C^2(\mathbb{R})$ は任意)

$$\theta(t+\varepsilon) = \int f(y)\left[\int p(t+\varepsilon,y|t,z)p(t,z|s,x)dz\right]dy$$
$$= \iint (f(y) - f(z) + f(z))\, p(t+\varepsilon,y|t,z)p(t,z|s,x)dzdy$$
$$= E\left[E_{X_t}[f(X_{t+\varepsilon})] - f(X_t) + f(X_t)\right]$$
$$\cong E\left[\varepsilon A_t f(X_t) + f(X_t)\right]$$
$$= \theta(t) + \varepsilon\int p(t,y|s,x)A_t f(y)dy$$
$$= \theta(t) + \varepsilon\int A_t^* p(t,y|s,x)f(y)dy \quad (\because \text{共役作用素の定義より})$$

よって、
$$\theta'(t) = \int f(y)A_t^* p(t,\cdot|s,x)|_y dy.$$

また
$$\theta'(t) = \int f(y)\frac{\partial}{\partial t}p(t,y|s,x)dy$$

なので、$\frac{\partial}{\partial t}p(t,y|s,x) = A_t^* p(t,y|s,x)$ を得る。 //

※ a_t, b_t が t によらないなら、
$\theta(t)$ を $u(t,x)$ と書くと、後向き方程式より $\frac{\partial}{\partial t}u = Au$ である。

例 $dX_t = \mu dt + dB_t$ (ドリフト付きBrown運動)

$$\Rightarrow \frac{\partial p_t}{\partial t} = -\mu \frac{\partial p_t}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial y^2}$$

$$p(t,y|s,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left[-\frac{(y-x-\mu(t-s))^2}{2(t-s)}\right]$$

例 OU過程

$$X_t = e^{\mu t}X_0 + \sigma\int_0^t e^{\mu(t-s)}dB_s$$

$$p(t,y|s,x) = \sqrt{\frac{\mu}{\pi\sigma^2[e^{2\mu(t-s)}-1]}} \exp\left\{-\frac{\mu[y-xe^{\mu(t-s)}]^2}{\sigma^2(e^{2\mu(t-s)}-1)}\right\}$$

→ X_t の周辺分布は正規分布なので平均と分散を計算すれば求まる。
実際 $p(t,y|s,x)$ は前向き方程式をみたす。

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,y|s,x) = -\mu\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(p)$$

※ $\mu<0$ のとき、定常分布(かつ極限分布)は

$$p(y) = \lim_{t\to\infty} p(t,y|s,x) = \sqrt{\frac{-\mu}{\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(-\mu)}{\sigma^2}y^2\right)$$

(初期値 x は指数関数的に忘れる。)

↓ 前向き方程式で $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ をみたす。

応用: 勾配ランジュバン動力学

$$dX_t = -\nabla f(X_t) + dB_t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_t}{\partial t} = -\nabla\left(\nabla f(y)\, p_t(y)\right) + \Delta p_t(y)$$: Fokker-Plank方程式

「連続の方程式」とも呼ばれる。

$$\Rightarrow p_t(y)\propto\exp(-f(y))$$ が定常分布 : $\frac{\partial p_t}{\partial t}=0$

$p(y)\propto\exp(-f(y))$ からサンプリングしたければ、勾配ランジュバン動力学に従って粒子をサンプリングすれば良い。