# 確率数理要論7

## ◎ 確率過程

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ : 確率空間
$S$ : 状態空間

$\mathcal{B}_S$ を $S$ の上に定義された $\sigma$-加法族とする.
- $S=\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_S=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ : 連続状態
- $S=\mathbb{Z}$ (整数), $\mathcal{B}_S$ : べき集合 : 離散状態

を主に考える.

$T$: 時間域
$T=\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ : 連続時間
$T=\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,3,\cdots\}$ : 離散時間

**Def**

任意の $t\in T$ で
$X_t:\Omega\to S$ が可測 ($^\forall C\in\mathcal{B}_S$, $X_t^{-1}(C)\in\mathcal{F}$)
の時、つまり $X_t$ が $S$ 値確率変数の時、
$X=(X_t)_{t\in T}$ を確率過程 (Stochastic Process)
と言う. //

**Def**

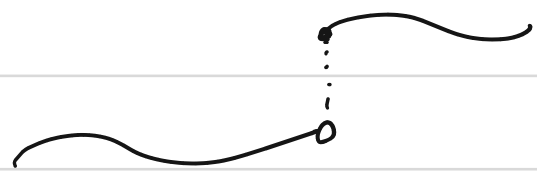
各 $\omega\in\Omega$ に対し、関数

$$\begin{array}{rccc} X_\cdot(\omega): & T & \longrightarrow & S \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & t & \longmapsto & X_t(\omega) \end{array}$$

が定まる. この $X_\cdot(\omega)$ を標本関数 (sample path) と言う. //
(標本過程, 標本路)

- $S=\mathbb{R}$, $T=\mathbb{R}_+$ の時.

  $C=C(T)$ を $T$ 上の連続関数全体の集合
  $D=D(T)$ を $T$ 上の各点で右連続かつ左極限が存在する関数の集合.
  (Right continuous with Left Limits, RCLL)
  (continue à droite, limite à gauche, càdlàg) とも言う.
  とすると,



  $X_\cdot(\omega)\in C(T)$ $(^\forall\omega\in\Omega)$ : $C$-過程
  $X_\cdot(\omega)\in D(T)$ $(^\forall\omega\in\Omega)$ : $D$-過程
  の場合を考えることが多い.

  例: ガウス過程 ($C$-過程), ポアソン過程 ($D$-過程)

- $T=\mathbb{Z}_+$ の時.

  Ex. 1. (ランダムウォーク, random walk)
  $(Z_i)_{i=1}^\infty$ が独立な r.v.
  $P(Z_i=1)=p$, $P(Z_i=-1)=1-p$
  $S=\mathbb{Z}$
  $X_0=0$, $X_t=Z_1+\cdots+Z_t$ $(t\in\mathbb{N})$ : ランダムウォーク

  2. (自己回帰過程)
  $(Z_i)_{i=1}^\infty$ : i.i.d. r.v., $Z_i\sim N(0,1)$
  $X_0$ : $(Z_i)_{i=1}^\infty$ と独立な r.v. (初期状態)

  $X_t=aX_{t-1}+\sigma Z_t$ : 自己回帰過程, AR(1)過程
  $(a\in\mathbb{R},\ \sigma>0)$ (autoregressive process)

**Def** (Markov過程, Markov連鎖)

$S$：状態空間

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ：$S$値確率過程

- 離散時間

$\forall A \in \mathcal{B}_S$,

$$P(X_t \in A \mid X_0, \dots, X_{t-1}) = P(X_t \in A \mid X_{t-1}) \quad (a.s.)$$

$P(X_t \in A \mid \sigma(X_0, \dots, X_{t-1}))$ の意味

ただし. $\sigma(X_0, \dots, X_{t-1}) = \sigma\left(\bigcup_{i=0}^{t-1} \sigma(X_i)\right)$ :

$X_0, \dots, X_{t-1}$ を可測にする最小の$\sigma$-加法族

- 連続時間

$\forall A \in \mathcal{B}_S$, $\forall u > t$,

$$P(X_u \in A \mid X_s, 0 \le s \le t) = P(X_u \in A \mid X_t) \quad (a.s.)$$

をみたすとき. $(X_t)_{t\in T}$ を Markov過程 と言う. //

- 昔の情報は影響しない. 直前の情報にのみ依存する.
- $P(X_t \in A \mid X_{t-1} = x_{t-1}) = p(A, x_{t-1})$ のように"推移確率"が $t$に依存しない時. 同次Markov過程 と言う.

**Ex.** (ランダムウォーク)

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t + 1 & (\text{確率 } p) \\ X_t - 1 & (\text{確率 } 1-p) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ 同次Markov過程 //

**Lem**

離散時間 Markov 連鎖を考える.

$m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ とすると, $\forall E \in \mathcal{B}_S$ において

$$P(X_{n+m} \in E \mid X_0, \ldots, X_n) = P(X_{n+m} \in E \mid X_n) \quad (a.s.)$$

//

(Proof) $m=1$ は定義そのもの.

ある $m$ で成り立っているとする.

$$P(X_{n+m+1} \in E \mid X_0, \ldots, X_n)$$
$$= E[\,P(X_{n+m+1} \in E \mid X_0, \ldots, X_{n+m}) \mid X_0, \ldots, X_n\,]$$

(∵ 条件付き期待値の性質(6))

$$= E[\,P(X_{n+m+1} \in E \mid X_{n+m}) \mid X_0, \ldots, X_n\,] \quad \text{—— } (*)$$

(∵ Markov 過程の定義)

ここで, $P(X_{n+m+1} \in E \mid X_{n+m})$ は $\sigma(X_{n+m})$-可測なので.

$m$ に関する帰納法の仮定より.

$$\text{右辺} = E[\,P(X_{n+m+1} \in E \mid X_{n+m}) \mid X_n\,].$$

これは $\sigma(X_n)$-可測であり, (*) の左辺もそうなる。さらに.

$$E[\,P(X_{n+m+1} \in E \mid X_0, \ldots, X_n)\mathbb{1}_A\,] = E[\,\mathbb{1}_E(X_{n+m+1})\mathbb{1}_A\,] \quad (\forall A \in \sigma(X_n))$$

(∵ 条件付き確率の定義より)

でもあるので、

条件付き期待値の一意性より

$$P(X_{n+m+1} \in E \mid X_0, \ldots, X_n) = P(X_{n+m+1} \in E \mid X_n) \quad (a.s.)$$

である. よって、$m+1$ の時も成立.

//

この Lem が連続時間 Markov 連鎖の定義を正当化する.

$$P(X_u \in E \mid X_s, s \le t) = P(X_u \in E \mid X_t) \quad (a.s.)$$

※ 時間が連続の時は "次の時刻" が意味をなさないので.
このような定義にする必要がある.

Def (加法過程)

$n$も任意

$X_0 = 0$ かつ、任意の $0 \leqq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して、

$X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ $(k=1, \ldots, n)$ が独立

のとき、$X = (X_t)_t$ を **加法過程** と言う。 //

Def (確率連続)

$T = \mathbb{R}_+$ とする。

$^\forall s$ において、$\displaystyle\lim_{t \to s} E[\, |X_t - X_s| \vee 1 \,] = 0$ のとき、

$X = (X_t)_t$ は確率連続であると言う。

( $X_t \xrightarrow{p} X_s$ と同値) //

Def (Levy過程)

$T = \mathbb{R}_+$ とする。

$X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ が確率連続な加法過程でかつ D-過程のとき、**Levy過程** という。 //

実はLevy過程は後述の Poisson過程 と Gauss過程 の和で表現することができる。

(Levy-Ito分解)

※ 最近ではさらに定常性も定義に入れるが、ここでは非定常でも良い広い定義を採用する。

## Poisson 過程

空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ を考える.

$\mu$ を $\mathbb{R}^d$ 上の $\sigma$-有限な非負測度とする. つまり

(1) ${}^\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し、$\mu(E) \geqq 0$

(2) ($\sigma$-有限性)

${}^\exists E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (高々可算個) で

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}^d$ かつ $\mu(E_n) < \infty$ $({}^\forall n)$.

すると. $0 < \mu(E) < \infty$ なる $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\nu_E(A) = \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)}$$

は確率測度になる.

<u>Def</u> (Poisson random measure)

r.v. の族 $X = (X(A))_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ が次をみたす時.

$X$ を平均測度 $\mu$ (mean measure) の Poisson random measure と言う.

(1) a.s. $\omega \in \Omega$ において $X(A) = X(A, \omega)$ が $A$ の関数として $\sigma$-有限な非負測度になっている.

(2) 任意の $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し、$X(E)$ は平均 $\mu(E)$ の Poisson 分布に従う.

($\mu(E) = 0$ なら $X(E) = 0$ (a.s.), $\mu(E) = \infty$ なら $X(E) = \infty$ (a.s.) とする)

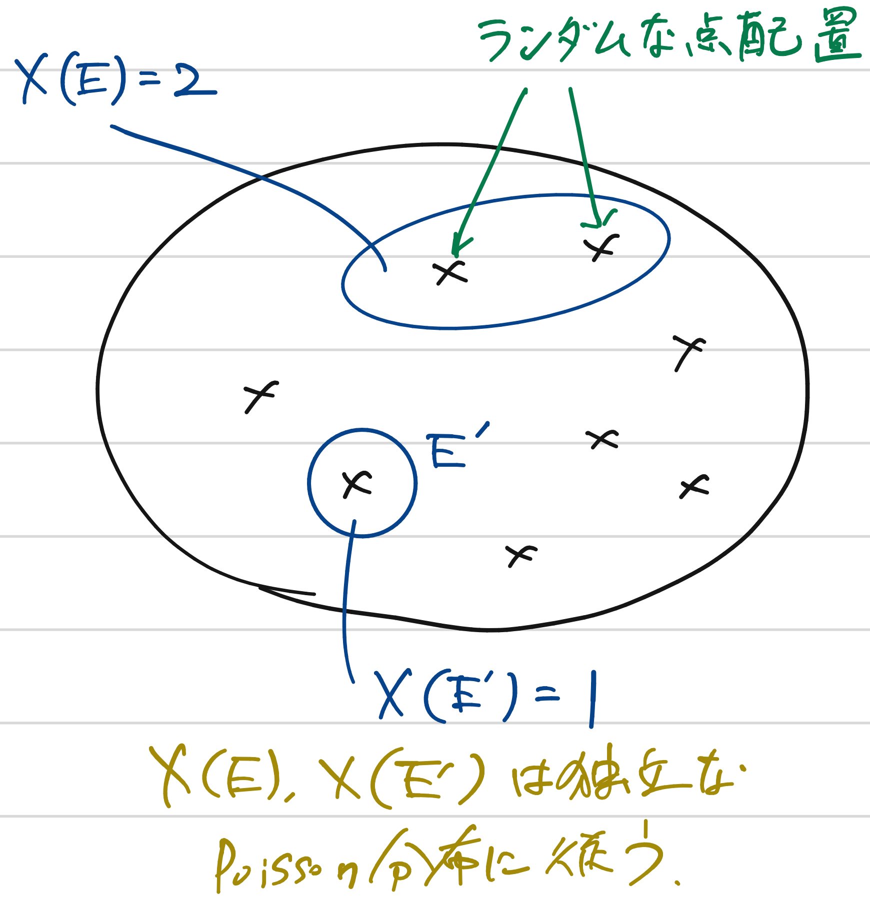
(3) 任意の互いに疎な $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ $(E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j))$ に対し、

$X(E_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ は独立. //

$\leftarrow$ Completely random measure

$\mu(A) = \int_A \lambda(x)\,dx$ と書けるとき、$\lambda$ を Poisson random measure の強度関数 (intensity function) と言う.

Poisson r.m. は空間上でランダムに発生する事象の件数のモデリング…に用いられる。
(ex. 交通事故の発生場所)




また、積分を考えることで
ジャンプを含む確率過程を
柔軟に表現できる。
$\longrightarrow$ Levy 過程

- Poisson r.m. を実際に構成してみる。

$\mu$ は $\sigma$-有限なので

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_n S_n, \quad 0 < \mu(S_n) < \infty$$
$$S_i \cap S_j = \phi, \quad S_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

と分割できる。
「ポアソン分布の和はポアソン分布」なので、各 $S_n$ に制限した

$$X_n = \{ X_n(A) = X(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), A \subseteq S_n \}$$

を考えれば良い。
以後、ある $S_n$ を固定して、$X = X_n$ として話を進める。

## Poisson random measure の構成

$$\begin{cases} - \ Z \sim P_o(\mu(S_n)) \\ - \ Y_j \sim \nu_n \quad (j=1,\dots,Z) \quad (\text{i.i.d.}) \\ \quad \text{ただし} \ \nu_n(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(S_n)} \quad (A \subset S_n). \end{cases}$$

として、

$$X(A) = \sum_{i=1}^{Z} \mathbb{1}_A(Y_i) = \left| \{ Y_i \mid Y_i \in A \} \right|$$

とすれば、これは Poisson r.m. になっている。

まず、互いに疎な $E_1, \dots, E_m$ に対して、
$Z$ で条件付けた
$$(X(E_1), \dots, X(E_m))$$
の分布は、
$$\left(\frac{\mu(E_1)}{\mu(S_n)}, \dots, \frac{\mu(E_m)}{\mu(S_n)}\right)$$
をパラメータとする多項分布に従うことはすぐわかる。

また、$k = k_1 + \cdots + k_m$ に対し、
$$\begin{aligned}
&P(X(E_j) = k_j,\ j = 1, \dots, m) \\
&= P(X(E_j) = k_j,\ j = 1, \dots, m,\ X(S_n) = k) \\
&= P(Z = k,\ X(E_j) = k_j,\ j = 1, \dots, m) \\
&= P(X(E_j) = k_j\ (j = 1, \dots, m) \mid Z = k)\, P(Z = k) \\
&= \underbrace{\frac{k!}{k_1! \cdots k_m!}\left(\frac{\mu(E_1)}{\mu(S_n)}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\mu(E_m)}{\mu(S_n)}\right)^{k_m}}_{\text{多項分布}} \cdot \underbrace{e^{-\mu(S_n)}\frac{\mu(S_n)^k}{k!}}_{\text{Poisson}} \\
&= \prod_{j=1}^{m} e^{-\mu(E_j)}\frac{(\mu(E_j))^{k_j}}{k_j!} \qquad (\because\ \mu(S_n) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_m))
\end{aligned}$$

← 独立な Poisson の積

つまり、

1. 各 $X(E_j)$ の周辺分布は平均 $\mu(E_j)$ の Poisson 分布 $(P_o(\mu(E_j)))$.
2. $(X(E_j))_{j=1}^{m}$ は独立.

これは Poisson r.m. の定義に他ならない。

$\mathbb{R}^d$ 全体でも $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して、
$$X(A) = \sum_{n=1}^{\infty} X(A \cap S_n)$$ と定めれば定義をみたす。

# 実軸上のPoisson過程

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の Poisson r.m. $Y = (Y(A))_{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ を考え、
$X_t(\omega) = Y([0,t])(\omega)$ と定める。
$(X_t)_{t \geq 0}$ を Poisson過程 と呼ぶ。（逆に $(X_t)_t$ から $Y$ が復元できることも Hopfの拡張定理から分かる）

簡単のため

$$\mu([a,b]) = \lambda(b-a) \quad (\text{一様強度}) \quad (\lambda > 0)$$

とする。このとき、$X$ を 強度 $\lambda$ の Poisson 過程 という

**Ex.**

来客数，株の取引回数，生命保険の請求回数
（独立に到着する事象の件数をモデル化）

**Thm**

$X$ を強度 $\lambda$ のPoisson過程とする

(1) $X_0 = 0$ (a.s.)

(2) $X$ は独立増分
つまり、任意の $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し、
$X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ （加法過程）
は独立。

(3) $\forall s < t$ に対し、
$X_t - X_s$ は平均 $\lambda(t-s)$ の Poisson分布に従う：

$$P(X_t - X_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(4) a.s. の $\omega \in \Omega$ に対して、$t \mapsto X_t(\omega)$ は右連続かつ左極限が存在し、単調非減少。（D-過程）

//

こちらを Poisson過程の定義としても良い。
また、Poisson過程 が Levy過程であることも分かる。（$X_t \stackrel{d}{=} X_s$ はすぐ分かる。）

Thm

$X_t$：強度$\lambda$のポアソン過程

$\tau_i = \inf\{t \ge 0 \mid X_t \ge i\}$ $(i \ge 1)$

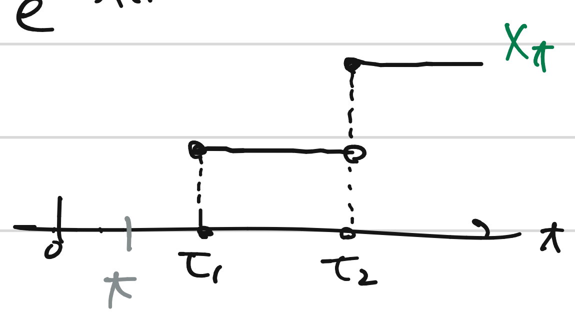
$\Longrightarrow$ $\tau_1, \tau_2-\tau_1, \tau_3-\tau_2, \ldots$

は独立に平均$1/\lambda$の指数分布に従う.

(Proof)

時刻$t$になっても最初のイベントが到着してない.

$$P(\tau_1>t) = P(X_t=0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$




よって $\tau_1$は平均$1/\lambda$の指数分布に従う.

$t>s$とする.

$$P(\tau_2>t, \tau_1\le s) = P(X_t - X_s = 0,\ X_s = 1)$$
$$= \frac{e^{-\lambda s}\cdot\lambda s}{1!}\times e^{-\lambda(t-s)} = \lambda s e^{-\lambda t}$$

よって、$\tau_2,\tau_1$の同時分布の確率密度関数は

$$p(t,s) = -\frac{d}{ds}\frac{d}{dt}P(\tau_2>t,\tau_1\le s) = \lambda^2 e^{-\lambda t}$$

( $P(\tau_2>t,\tau_1\le s) = \int_t^\infty\int_0^s p(u,v)\,du\,dv$

となり、分布関数が微分できて$L^1$なら密度$p$が存在)

よって、$t \leftarrow s+u$として変数変換すると、(つまり $(\tau_2,\tau_1)\mapsto(\tau_2-\tau_1,\tau_1)$ という変換)

$(\tau_2-\tau_1,\tau_1)$の密度$\tilde{p}(u,s)$は

$\tilde{p}(u,s) = p(s+u,s) = \lambda e^{-\lambda u}\cdot\lambda e^{-\lambda s}$

$\lambda e^{-\lambda s}$は$\tau_1$の密度で、$\tilde{p}$を$s$について積分すると、

$\tau_2-\tau_1$のdensityは$\lambda e^{-\lambda u}$となる.

同時密度が周辺密度の積で書けるので、$\tau_2-\tau_1$と$\tau_1$は独立.

一般の$n$に対しては、帰納法もしくは、$t_1<t_2<\cdots<t_n$, $\varepsilon>0$に対して、

$P(t_j<\tau_j\le t_j+\varepsilon\ (1\le j\le n))$を計算して全体を$1/\varepsilon^n$倍して$\varepsilon\to 0$とすれば密度が計算できる. //

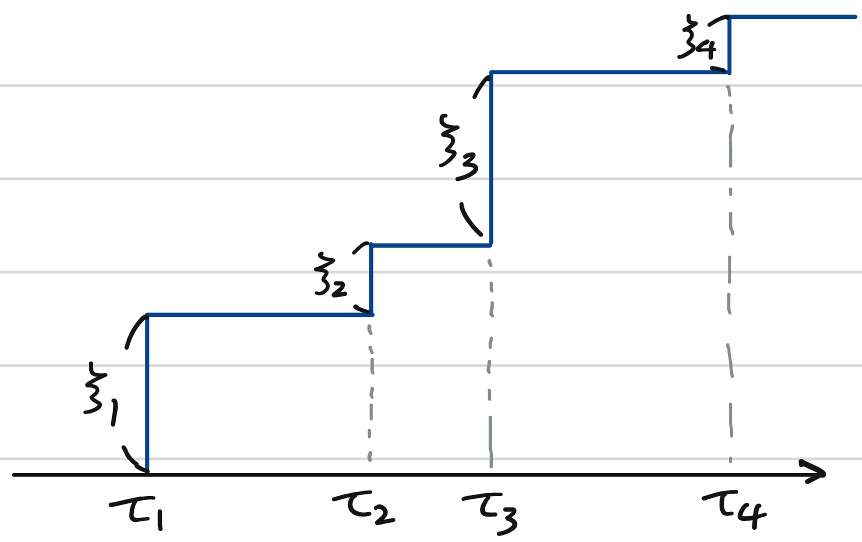
# Poisson過程の一般化

## • Compound Poisson process

$\tau_1, \tau_2, \dots$ : Poisson過程のジャンプ点

$\xi_1, \xi_2, \dots$ : $F$ から i.i.d.

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mathbb{1}\{\tau_i \leq t\}$$




(保険金請求金額の累計
⟶ 保険料の設定)

(ドリフト付き)

## • Pure-jump Levy過程

← 時間×空間の上のPoisson r.m.

- $N$: $[0,\infty)\times\mathbb{R}$上のPoisson random measure
- $\mu$: $N$の平均測度, $\forall t \geq 0$ において
  - $\mu(\{t\}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})) = 0$, (← ある時刻$t$でジャンプがおきる確率は0)

    ジャンプがおきる時刻の分布は連続分布.
  - $\int_{s\in[0,t]}\int_{|u|>0} (u^2\wedge 1)\,\mu(ds\,du) < \infty$ (← $X_t$が発散しないための条件)

    $u=0$付近(低いジャンプ)で無限回ジャンプが発生しても良いが、あまりに多いことはない.
- $m(t)$: 連続 かつ $m(0)=0$

$\phi(u) = \max\{-1, \min\{u,1\}\}$ として.

$$X_t = m(t) + \lim_{n\to\infty} \int_{s\in[0,t]}\int_{|u|\geq\frac{1}{n}} \left(u N(ds,du) - \phi(u)\mu(ds,du)\right)$$

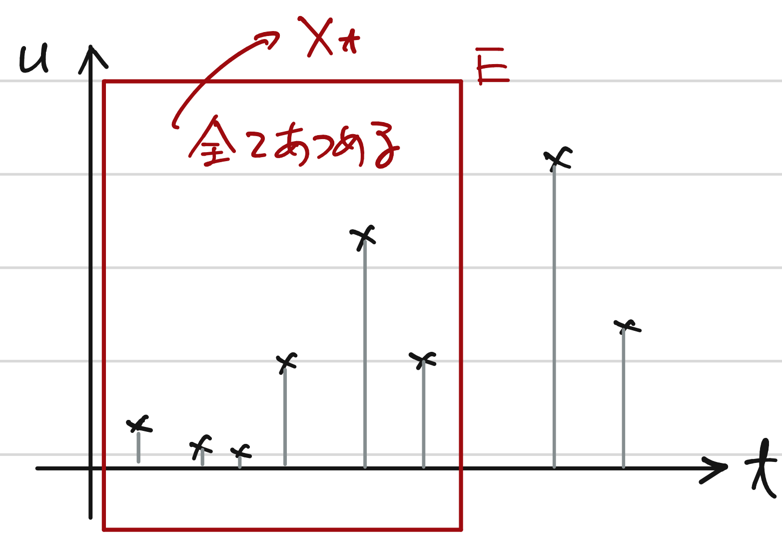
とすれば (ドリフト付き) pure jump Levy過程と呼ばれる、または Poisson型Levy過程

※もっとも $m(t)=0$ のときを普通は pure jump Levy と呼ぶ

- $\mu([0,t]\times[-1,1]) = \infty$ の時、小さいジャンプが $[0,t]$ の間で無限回おきる.

- $X_t$の定義内の $\lim_{n\to\infty}$ は無限回ジャンプがおきる状況を考慮している. lim は概収束することが知られている. (一様に概収束)

集合E内の×の個数が$N(E)$. その平均が$\mu(E)$. 各ジャンプの高さが$u$. ⟶



・pure jump Levy 過程の特性関数

$\phi(u) = \max\{\min\{u,1\}, -1\}$ とする。

$$E[e^{izX_t}] = \exp\left\{ i m(t) z + \int_{|u|>0} (e^{izu} - 1 - i\phi(u) z)\, \mu([0,t]\times du) \right\}$$

($X_t$ の c.f.)

なお、$E \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus(-a,a))$ に対しては、(つまり $E$ は $(-a,a)$ を含まないBorel集合)

$X_t^E = \int_{[0,t]} \int_E u\, N(ds\,du)$ とすると、

$$E[e^{izX_t^E}] = \exp\left\{ \int_E (e^{izu} - 1) \mu([0,t]\times du) \right\}$$ ← こちらは比較的簡単に示せる。

例：$\mu(dt\,d\xi) = \underbrace{dt}_{\text{ルベーグ測度}} \times \underbrace{r\,\xi^{-1}\exp(-\lambda\xi)}_{=\,g_{r,\lambda}(\xi)\text{ とおく.}}$ $(\xi>0)$, $m(t) = \int_{[0,t]} \int_{0<|u|\le 1} u\, \mu(ds\,du)$

↳ $\int_0^1 g_{r,\lambda}(\xi) d\xi = \infty$

→ $N((a,b)\times(0,1]) = \infty$ (a.s.)

$X_t \sim$ 平均 $\frac{rt}{\lambda}$, 分散 $\frac{rt}{\lambda^2}$ のガンマ分布に従う。(特性関数より確認できる.)

⇒ Gamma 過程と言う.

⟶ Dirichlet 過程も導出できる：

$$Y(A) = \frac{\int_{x'\in A} \int_{\xi\in[0,\infty)} \xi\, N(dx'\,d\xi)}{\int_{[0,\infty)} \xi\, N(S, d\xi)} \quad (A \subseteq S)$$

($S$：全体)

：Gamma 過程の比

(Dirichlet分布の無限次元版)

自然言語処理，ノンパラメトリックベイズ推定 等で用いられる。

$S$上の分布のノンパラメトリック推定に用いる。

(トピック分布の推定 等)