

確率数理要論 8

増大情報系

Def (増大情報系・filtration)

確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) におい

\mathcal{F} の部分 σ -加法族の族 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が

$0 \leq s \leq t$ に対し、

$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

をみたすとき、増大情報系 (filtration) と呼ぶ。 //

Ex.

B_t : ブラウン運動

$\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s \mid s \in [0, t]\})$ は filtration. //

σ -加法族 \mathcal{F}_t は時刻 t までに起きた事象の“情報”を表す。

Def

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$: 増大情報系

$(X_t)_{t \geq 0}$: 確率過程

$\forall t \geq 0$ で X_t が \mathcal{F}_t -可測

$\stackrel{\text{def}}{\iff} (X_t)_{t \geq 0}$ が \mathcal{F}_t -適合 と言う。 ((\mathcal{F}_t) -適合とも書く) //

(\mathcal{F}_t -adaptive)

↑
未来の出来事には依存しない。

• 確率積分 (伊藤積分, stochastic integration)

Def

$L^2([a, b])$ ($0 \leq a < b$)

を以下をみたす確率過程 $f = (f_t)_{t \in [a, b]}$ の集合とする.

(1) 写像 $[a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$(t, \omega) \mapsto f_t(\omega)$

が $\mathcal{B}([a, b]) \times \mathcal{F}$ - 可測

↑ 直積 σ -加法族

(2) f は \mathcal{F}_t -適合

(3) $E \left[\int_a^b f_t^2 dt \right] < \infty$

$\hookrightarrow \|f\|_{L^2([a, b])} := \sqrt{E \left[\int_a^b f_t^2 dt \right]}$ とする. //

確率積分 $\int_a^b f_t dB_t$ の定義

以後、ブラウン運動 $(B_t)_{t \geq 0}$ は \mathcal{F}_t -適合かつ $B_t - B_s$ は \mathcal{F}_s と独立とする.

→ このとき、 $(\mathcal{F}_t)_t$ - ブラウン運動と呼ぶ.

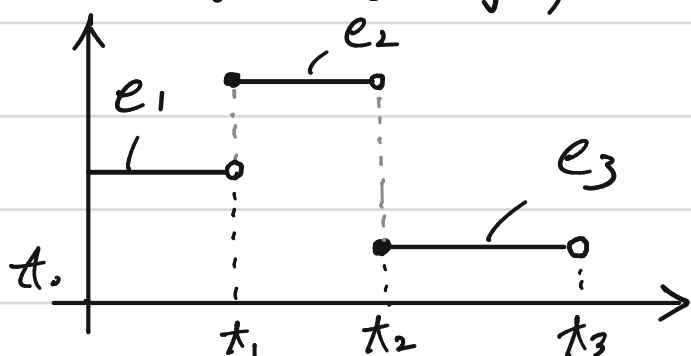
(例として $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s \mid s \in [0, t]\})$ とおけば良い.)

まず、以下の状況を考える:

$f_t(\omega) = \sum_{j=1}^n e_j(\omega) \mathbb{1}_{[t_{j-1}, t_j)}(t)$ (単過程, simple process)

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$: $[a, b]$ の分割 (固定分点)

$e_j(\omega) = \mathcal{F}_{t_{j-1}}$ -可測, $e_j \in L^2$ (i.e. $E[e_j^2] < \infty$)



このとき.

$$\int_a^b f_t d B_t := \sum_{j=1}^n e_j(\omega) (B_{\tau_j}(\omega) - B_{\tau_{j-1}}(\omega)) \quad [\text{伊藤積分}]$$

と定める.

c.f. 部分積分: $f_t(\omega) = e(\omega)$ のとき

$$\int_a^b f_t \frac{dB_t}{dt} dt = [f_t B_t]_a^b - \int_a^b \underbrace{f'_t}_{0} B_t dt$$

$$= e(\omega) \cdot (B_b - B_a)$$

ここで B_t は微分不可能なので、= だけあてはまては行かない

単過程から一般の f_t に拡張した $\omega \rightarrow$ 極限を取り、
(L^2 内積)

Thm (等長性, Ito-isometry)

$f = (f_t)_{t \geq 0}$: 単過程

$$\Rightarrow E \left[\int_a^b f_t^2 dt \right] = E \left[\left(\int_a^b f_t dB_t \right)^2 \right]$$

つまり $f \mapsto \int_a^b f_t dB_t$ は $L^2([a,b])$ から $L^2(\Omega)$ への等長写像

($\int_a^b f_t dB_t$ は確率変数) //

(Proof) $E[B_{\tau_j} - B_{\tau_{j-1}} | \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}] = 0, E[(B_{\tau_j} - B_{\tau_{j-1}})^2 | \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}] = \tau_j - \tau_{j-1}$

($\because B_t - B_s$ は \mathcal{F}_s と独立であること思い出せる)

右辺の

$$\text{右辺} = E \left[\sum_{j=1}^n e_j^2(\omega) (B_{\tau_j}(\omega) - B_{\tau_{j-1}}(\omega))^2 \right]$$

$$+ 2 \sum_{i < j} e_i e_j (B_{\tau_i} - B_{\tau_{i-1}}) (B_{\tau_j} - B_{\tau_{j-1}})$$

$$= \sum_{j=1}^n E \left[e_j^2 \underbrace{E[(B_{\tau_j} - B_{\tau_{j-1}})^2 | \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}]}_{\tau_j - \tau_{j-1}} \right] \leftarrow e_j \text{ は } \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}\text{-可測}$$

$$+ 2 \sum_{i < j} E \left[e_i (B_{\tau_i} - B_{\tau_{i-1}}) e_j \underbrace{E[(B_{\tau_j} - B_{\tau_{j-1}}) | \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}]}_0 \right]$$

$$= \sum_{j=1}^n (\tau_j - \tau_{j-1}) E[e_j^2] = E \left[\int_a^b f_t^2 dt \right]$$

$\uparrow e_i (B_{\tau_i} - B_{\tau_{i-1}}),$
 $e_j \text{ は } \mathcal{F}_{\tau_{j-1}}\text{-可測}$
//

Thm (稠密性)

$\forall f \in L^2([a,b])$ に対し, $\exists f^{(m)} (m=1,2,\dots)$: 単過程の列 \square .

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b (f_t - f_t^{(m)})^2 dt \right] = 0$$

$\leftarrow \|f - f^{(m)}\|_{L^2([a,b])}^2$

つまり, 単過程は $L^2([a,b])$ 内で稠密.

(Proof)

f_t が a.s. で t について連続かつ一様有界 ($\forall t, \omega$ で $|f_t(\omega)| \leq M$) な場合を示す.

$$f_t^{(m)}(\omega) = \sum_{j=1}^m f_{\tau_{j-1}}(\omega) \mathbb{1}_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t)$$

\square $[a,b]$ の m 等分割 $a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = b$ に対し定義すれば,

優収束定理より

$$E \left[\int_a^b (f_t - f_t^{(m)})^2 dt \right] \rightarrow 0$$

が言える.

連続でなければ, f_t をまず

$$f_t^{(\varepsilon)}(\omega) = \varepsilon^{-1} \int_{t-\varepsilon}^t f_s(\omega) ds$$

で近似し, f_t が有界でなければ, $M > 0$ に対し

$$f_t^{(M)} := (f_t \vee (-M)) \wedge M$$

で近似すれば良い.

$f \in L^2([a,b])$ に対し, 単過程 $f^{(m)} \in \mathcal{U}$ で $f^{(m)} \rightarrow f$ in $L^2([a,b])$ とする. 等長性より $(\int_a^b f_t^{(m)} dB_t)_{m=1}^\infty \in L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 内の \square - \square -列になる.

$L^2(\Omega)$ は完備なので, $L^2(\Omega)$ 内に \square - \square -列の収束先が存在する.

これを $\int_a^b f_t dB_t$ と定める.

$$\int_a^b f_t dB_t := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b f_t^{(m)} dB_t \quad (\text{二次平均収束})$$

定義から $\int_a^b f_t dB_t$ は \mathcal{F}_b -可測な L^2

したがって、これは $f^{(m)}$ の取り方による。

なぜなら、

$$\|f^{(m)} - f\|_{L^2([a,b])} \rightarrow 0, \quad \|g^{(m)} - f\|_{L^2([a,b])} \rightarrow 0$$

↑ $E\left[\int_a^b (f_t^{(m)} - f_t)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$ の意味

なぜなら、

$$\begin{aligned} \|f^{(m)} - g^{(m)}\|_{L^2([a,b])} &= \|f^{(m)} - f + f - g^{(m)}\|_{L^2([a,b])} \\ &\leq \|f^{(m)} - f\|_{L^2([a,b])} + \|g^{(m)} - f\|_{L^2([a,b])} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

ここで、一方では

$$\|f^{(m)} - g^{(m)}\|_{L^2([a,b])} = E\left[\left(\int_a^b f_t^{(m)} dB_t - \int_a^b g_t^{(m)} dB_t\right)^2\right] \quad (\because \text{等長性})$$

より、右辺も 0 に収束し、 $\int_a^b f_t^{(m)} dB_t$ と $\int_a^b g_t^{(m)} dB_t$ は $L^2(\Omega)$ 内で同じ元へ収束する。

Thm (等長性) ← 後述: 単過程による

$f \in L^2([a,b])$ に対し、

$$E\left[\int_a^b f_t^2 dt\right] = E\left[\left(\int_a^b f_t dB_t\right)^2\right] \quad //$$

Proof $\int_a^b f_t dB_t$ の構成から (後述) 自明である。示しておく。

$(f_t^{(m)})_t \rightarrow (f_t)_t$ in $L^2([a,b])$ より。

$$E\left[\int_a^b f_t^{(m)2} dt\right] = \|f^{(m)}\|_{L^2([a,b])}^2 \rightarrow \|f\|_{L^2([a,b])}^2.$$

さらに、等長性より、

$$\|f^{(m)}\|_{L^2([a,b])}^2 = E\left[\left(\int_a^b f_t^{(m)} dB_t\right)^2\right] \quad (\because \text{等長性})$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow (\because \int_a^b f_t dB_t \text{ の定義, } L^2(\Omega) \text{ への収束}) \\ \|f\|_{L^2([a,b])}^2 & & E\left[\left(\int_a^b f_t dB_t\right)^2\right] \end{array}$$

よって、この2つは等しい。

Lem

$f, g \in L^2([a, b])$ に対し、

$$(1) E\left[\int_a^b f_t dB_t\right] = 0$$

$$(2) \int_a^b (\alpha f_t + \beta g_t) dB_t = \alpha \int_a^b f_t dB_t + \beta \int_a^b g_t dB_t \quad (\text{a.s.})$$

証明は省略。ウィットマン単過程に対し(2) 成り立つことから示せる。

Remark

伊藤積分はより広いクラスの被積分関数にも定義できる。

すなわち、 f_t が F_t -適合格かつ $\int_a^b f_t^2 dt < \infty$ (a.s.)

$$(E[\int_a^b f_t^2 dt] < \infty \text{ ではない})$$

↳ L^2 -内で確率収束列を作り、その収束先として定義。

Def

確率過程 $X = (X_t)_t, Y = (Y_t)_t$ に対し、

Y が X の modification または version であるとは、

$$\forall t \text{ として } P(X_t = Y_t) = 1$$

となる時を言う。

特に Y が連続なパスを持つ時、 Y を連続な修正と言う。
(continuous modification)

Remark

不定積分 $X_t = \int_0^t f_s dB_s$ を考えると、 X_t は L^2 -収束の意味で定義されるので、a.s. には一意に定まる。

零集合が t に依存するので、 $(X_t)_{t \geq 0}$ が連続なパスを持つとは限らない。

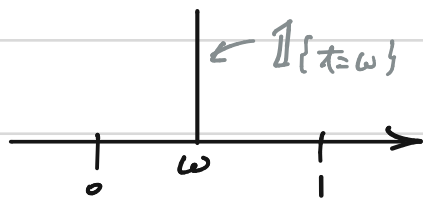
例えば、 $\Omega = [0, 1]$, P : 一様分布 (Lebesgue 測度), $f = 0$ とすると、 $\int_0^t 0 dB_s = 0$ となるが、任意の $t \in [0, T]$ に対し、 L^2 の元として $0 = \mathbb{1}_{\{t=\omega\}}$ があるので、 $(\because \mathbb{1}_{\{t=\omega\}} = 0 \text{ (a.s.)})$

$$\int_0^t 0 dB_s = \mathbb{1}_{\{t=\omega\}} \text{と} \text{て} \text{ま} \text{す}.$$

しかし、全ての $\omega \in \Omega$ に対し、

$t \mapsto \mathbb{1}_{\{t=\omega\}}$ は連続ではない。

一方、上述のように $\mathbb{1}_{\{t=\omega\}} = 0$ (a.s.) ($\forall t \in [0,1]$) あり、連続な修正を持つ。



しかし、確率積分 $(X_t)_{t \in [0,T]}$ は連続な修正を持つこと知らぬ。

これは単過程をうまく取りこめば $X_t^{(n)} = \int_0^t f_s^{(n)} dB_s$ から X_t に a.s. で一様収束するようにできる (後述の Doob の不等式より)。

さらに Brown 運動の連続性より $t \mapsto X_t^{(n)}$ は a.s. で連続であることあり、 X_t も t について連続な修正が存在することに従う。

以下、確率積分は (零集合におけるふるまいを調整して) 連続なプロセスを持つ。

Ex. $X_t = \int_0^t B_s dB_s$ (伊藤の公式を使えば楽だが、ここでは直接導く)

$n=1,2,\dots$ に対し $\pi_j = \frac{j}{n}t$ ($j=0,1,2,\dots,n$) とおく。

$$f_s^{(n)}(\omega) = \sum_{j=1}^n B_{\pi_{j-1}} \mathbb{1}_{[\pi_{j-1}, \pi_j)}(s)$$

とあり、このとき

$$\begin{aligned} \int_0^t f_s^{(n)} dB_s &= \sum_{j=1}^n B_{\pi_{j-1}} (B_{\pi_j} - B_{\pi_{j-1}}) \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{2} (B_{\pi_{j-1}} - B_{\pi_j}) + \frac{1}{2} (B_{\pi_{j-1}} + B_{\pi_j}) \right\} (B_{\pi_j} - B_{\pi_{j-1}}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (B_{\pi_j} - B_{\pi_{j-1}})^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^n (B_{\pi_{j-1}}^2 - B_{\pi_j}^2)}_{\parallel B_t^2} \end{aligned}$$

一方 $\sum_{j=1}^n (B_{\pi_j} - B_{\pi_{j-1}})^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (B_{\pi_j} - B_{\pi_{j-1}}) \right)^2 \xrightarrow{\text{in } L^2} t$ (\because 大数の法則)

$$\text{よ} \text{て} \quad X_t = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$

と通常の積分との違い!

普通の積分の感覚で計算したら?

仮に $X_t = \frac{1}{2} B_t^2$ とする.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} X_t = B_t \cdot \frac{dB_t}{dt} \quad \leftarrow \text{普通なら (可微分なら)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X_t &= \int_0^t \frac{dX_s}{ds} ds = \int_0^t B_s \frac{dB_s}{ds} ds \\ &= \int_0^t B_s dB_s \end{aligned}$$

となりので.

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2$$

となりので. これは先の "正しく" 計算とズレる.

すなわち, 容易に $\frac{d}{dt}(B_t^2) = 2B_t \frac{dB_t}{dt}$ のような計算をしては
いけない.

→ 後述の 伊藤の公式.

• マルティンゲール (Martingale)

確率過程の解析では martingale 理論が役に立つ。
まずは離散時間で考える。

Def (Martingale)

$X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$: 確率過程

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$: 増大情報系

X が以下をみたすとき (\mathcal{F} -)マルティンゲール と言う。

(1) $\forall n$ とき $X_n \in L^1$ (i.e., $E[|X_n|] < \infty$)

(2) $(X_n)_n$ は \mathcal{F}_n -適合

(3) $E[X_n | \mathcal{F}_m] = X_m$ (a.s.) ($\forall n \geq m$)

Ex.

$(z_n)_{n=1}^{\infty}$: i.i.d. r.v., $z_1 \in L^1$, $E[z_1] = 0$

$\Rightarrow X_0 = 0,$

$X_n = \sum_{i=1}^n z_i$

とすると $(X_n)_n$ はマルティンゲール

$(\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n := \sigma(z_1, \dots, z_n))$

(\because)

$\forall n, X_n \in L^1$ は明らか。 \mathcal{F}_n -適合性も明らか。

任意の $n > m$ に対し

$$E[X_n | \mathcal{F}_m] = X_m + E[z_{m+1} + \dots + z_n | \mathcal{F}_m] = X_m \quad (\text{a.s.})$$

$$(\because X_m \text{ は } \mathcal{F}_m\text{-可測} \text{ かつ } z_i \text{ は独立で } E[z_i | \mathcal{F}_m] = 0 \text{ (a.s.)})$$

//

S : 可算集合, $(X_n)_{n=1}^{\infty}$: S 値 t.v.s

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

つまり $\bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(\{a_i\})$

なら \mathcal{F}_n の元は $\{X_1=a_1, \dots, X_n=a_n\}$ の形の集合の和集合で書ける。
→ \mathcal{F}_n は時刻 n までに得られる情報を表す。

X_n はギャンブルにおける時刻 n の資産と好みに考えよう。

マルティンゲールの Def の (3) は時刻 m までの情報下での X_n の条件付期待値が X_m に等しい。つまり、この時点での将来の利益の条件付期待値が 0 であることを意味する。

→ マルティンゲールは「公平な賭け」とも言われる。

Def

マルティンゲールの定義で (3) の代わりに

$$(3') \quad E[X_n | \mathcal{F}_m] \geq X_m \quad (\text{a.s.}) \quad (\forall n \geq m) \Rightarrow X \text{ は 劣マルティンゲール} \\ \text{sub-martingale}$$

$$(3'') \quad E[X_n | \mathcal{F}_m] \leq X_m \quad (\text{a.s.}) \quad (\forall n \geq m) \Rightarrow X \text{ は 優マルティンゲール} \\ \text{super-martingale}$$

Def (停止時刻, stopping time)

$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$: 増大情報系

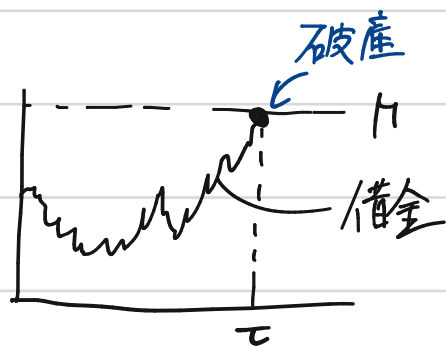
確率変数 $\tau: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z}_+)$$

をみたすとき、 τ を停止時刻と言う。

← 時刻 n までの情報で $\tau = n$ と分かる。
未来の情報には依存しない。

Ex. Markov 連鎖における初到達時刻
(ギャンブルで破産する時刻とか)



Thm (任意抽出定理, Optional stopping theorem)

$X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$: 常2L4ンT-IL

τ : 停止時刻 τ . $\exists n \in \mathbb{N}$ $\tau \leq n$ (a.s.)

$$\Rightarrow E[X_0] \leq E[X_{\tau}] \leq E[X_n] \quad \leftarrow \tau \in \mathcal{F}_n, X_{\tau}(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$$

特に X が 常2L4ンT-IL なら $E[X_{\tau}] = E[X_0]$

※ 有利. 常2L4ンT-IL は ω の賭けを定める戦略をとっても利益の期待値は0.

(Proof)

$$E[X_{\tau}] = E[X_{\tau} \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] = \sum_{i=0}^n E[X_i \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}].$$

∵ $\{\tau \geq i\} \in \mathcal{F}_i$ かつ $E[X_n | \mathcal{F}_i] \geq X_i$ (a.s.) なのだから.

条件付き期待値の性質より

$$\text{右辺} \leq \sum_{i=0}^n E[E[X_n | \mathcal{F}_i] \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}]$$

$$= \sum_{i=0}^n E[X_n \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] \quad (\because \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \text{ は } \mathcal{F}_i\text{-可測だから})$$

$$= E[X_n \underbrace{\sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}}] = E[X_n]$$

\downarrow ($\because 0 \leq \tau \leq n$)

∴ $E[X_{\tau}] \leq E[X_n]$ は示せた.

$$\mathcal{F}_2, \{\tau \geq k\} = \{\tau \leq k-1\}^c = \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \{\tau = i\} \right)^c \in \mathcal{F}_{k-1} \quad (\mathcal{F}_i)$$

$$E[X_0] = E[X_0 \mathbb{1}_{\{\tau=0\}}] + E[X_0 \mathbb{1}_{\{\tau \geq 1\}}]$$

$$\leq E[X_{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau=0\}}] + E[E[X_1 | \mathcal{F}_0] \mathbb{1}_{\{\tau \geq 1\}}]$$

$\leftarrow \mathcal{F}_0\text{-可測}$

$$= E[X_{\tau} \mathbb{1}_{\{\tau=0\}}] + E[X_1 \mathbb{1}_{\{\tau \geq 1\}}]$$

\vdots

$$= E[X_{\tau} \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] = E[X_{\tau}].$$

特に X が 常2L4ンT-IL なら $(-X_n)_{n=0}^{\infty}$ も 常2L4ンT-IL なのだから.

$$E[-X_0] \leq E[-X_{\tau}] \leq E[-X_n] \quad \text{だから} \quad E[X_{\tau}] = E[X_0]$$