確率数理要論9

・マルチンゲールの各種性質

以下，離散時間でマルチンゲールの性質を論ずる．
これらは少しの修正で連続時間でも成り立つ．

Thm（Doobの不等式）

$(X_n)_{n=0}^{\infty}$：非負値の劣マルチンゲール

$$\Longrightarrow P\left(\max_{0\le i\le n} X_i \ge a\right) \le \frac{E[X_n]}{a} \quad (\forall a>0)$$ //

※ チェビシェフの不等式の拡張

※ 非負性を外したら．

$$P\left(\max_{0\le i\le n} X_i \ge a\right) \le \frac{E[\max(X_n,0)]}{a} \quad (\forall a>0)$$

(Proof)
$$\tau = \begin{cases} \min\{0\le i\le n \mid X_i \ge a\} & \text{if } 0\le {}^{\exists}i\le n,\ X_i\ge a \\ n & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと，$\tau \le n$ で τ は停止時刻．

任意抽出定理より

$$E[X_n] \ge E[X_\tau] \ge E[X_\tau \mathbb{1}\{X_\tau \ge a\}] \ge E[a\,\mathbb{1}\{X_\tau \ge a\}]$$
$$= a\,P(X_\tau \ge a)$$

$\because X_\tau$の非負性

$X_\tau \ge a \Longleftrightarrow \max_{0\le i\le n} X_i \ge a$ より o.k. //

Lem $(X_n)_{n=0}^{\infty}$：マルチンゲール，$\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：凸関数，$\varphi(X_n)\in L^1$

$\Longrightarrow (\varphi(X_n))_{n=0}^{\infty}$ は劣マルチンゲール

(Proof) Jensenの不等式より

$$E[\varphi(X_n)\mid\mathcal{F}_m] \ge \varphi(E[X_n\mid\mathcal{F}_m]) = \varphi(X_m) \quad (a.s.)$$ //

Cor $(X_n)_{n=0}^{\infty}$：マルチンゲール，$a>0$，$p\ge1$，$X_n\in L^p$

$$\Longrightarrow P\left(\max_{1\le i\le n}|X_i|\ge a\right) = P\left(\max_{1\le i\le n}|X_i|^p \ge a^p\right) \le \frac{E[|X_n|^p]}{a^p}$$ //

(Proof) $\varphi(x)=|x|^p$ は凸 //

Thm (Doobの分解)

$(X_n)_n$：劣マルチンゲール，可積分 ($X_n \in L^1, \forall n$)
に対し，以下をみたす$(A_n)_n$が (a.s.で) 唯一存在する：

(1) $A_0 = 0$

(2) A_n は $\underline{\mathcal{F}_{n-1}}$-可測 ←可予測と言う．(predictable)

(3) $(X_n - A_n)_n$ はマルチンゲール

(4) $A_{n-1} \leqq A_n$ (a.s.) ($\forall n$) //

つまり，劣マルチンゲールは以下のように分解できる：

$$\underbrace{X_n}_{\text{劣マ}} = \underbrace{A_n}_{\substack{\mathcal{F}_{n-1}\text{-可測} \\ \text{広義単調増大}}} + \underbrace{Z_n}_{\text{マルチンゲール}}$$

(Proof)

[存在] まず $A_0 = 0$ として，

$$A_n = A_{n-1} + E[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}]$$

とする。$(X_n)_n$は劣マルチンゲールなので，これは(1)〜(4)の条件をみたす．

[一意性]

$(B_n)_n$も (1)〜(4)の条件を満たすとすると，

$\Delta_n = B_n - A_n$ とおく．

(1)より，$\Delta_0 = 0$ である．

また，$\Delta_n = B_n - A_n = \overbrace{(B_n - X_n)}^{\text{マ}} - \overbrace{(A_n - X_n)}^{\text{マ}}$ より Δ_nもマルチンゲール．

かつ，Δ_nは$\mathcal{F}_{n-1}$-可測である

よって，$\Delta_n \underset{\mathcal{F}_{n-1}\text{可測性}}{=} E[\Delta_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \underset{\text{マルチンゲール性}}{=} \Delta_{n-1}$ である．

帰納的に，$\Delta_0 = 0$であることから，$\Delta_n = 0$ (a.s.) ($\forall n$) である． //

ζ：停止時刻

$$\mathcal{F}_\zeta := \{ A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\zeta = n\} \in \mathcal{F}_n \ (\forall n \in \mathbb{Z}^+) \}$$

とする。

今、$(X_n)_n$ が $\mathcal{F}_n$-適合のとき、$X_\zeta(\omega) := X_{\zeta(\omega)}(\omega)$ は $\mathcal{F}_\zeta$-可測である。

$X_\zeta^{-1}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \{\zeta = n\} \cap \underbrace{X_n^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}_n} \Rightarrow \{\zeta = n\} \cap X_\zeta^{-1}(B)$

$= \underbrace{\{\zeta = n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{X_n^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

($\because$ ζは停止時刻)

Thm (Huntの定理)

$(X_n)_n$：劣マルチンゲール

τ, τ'：<u>有界な</u>停止時刻で $\tau \leq \tau'$ ($\forall \omega$) とする。

このとき、

$$X_\tau \leqq E[X_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] \quad (a.s.)$$

である。 //

(つまり劣マ性は停止時刻に対しても成り立つ)

(Proof)

Doobの分解より、$X_n = A_n + Z_n$ と分解できる。

$\tau \leqq \tau'$ より $A_\tau \leq A_{\tau'}$ であり、A_τ は $\mathcal{F}_\tau$-可測なので (上のコメント参照)

$$E[X_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] \geqq E[Z_{\tau'} + A_\tau \mid \mathcal{F}_\tau] \quad (\because A_\tau \leq A_{\tau'})$$

$$= E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] + A_\tau \quad (\because \mathcal{F}_\tau\text{-可測性})$$

よって、$E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] = Z_\tau$ をマルチンゲール $(Z_n)_n$ に対して示せば良い。

τ, τ' は有界なので、$\exists N$ で $\tau, \tau' \leqq N$ (a.s.) である。

このとき、$\forall E \in \mathcal{F}_\tau$ に対して、

$$E[Z_N 1_E] = \sum_{n=0}^{N} E[Z_N 1_{\{\tau = n\} \cap E}] \quad (\because \tau \leqq N)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} E[E[Z_N \mid \mathcal{F}_n] 1_{\{\tau = n\} \cap E}] \quad (\because E \in \mathcal{F}_\tau)$$

$\mathcal{F}_n$-可測

$$= \sum_{n=0}^{N} E[Z_n 1_{\{\tau = n\} \cap E}]$$

$$= E[Z_\tau 1_E]$$

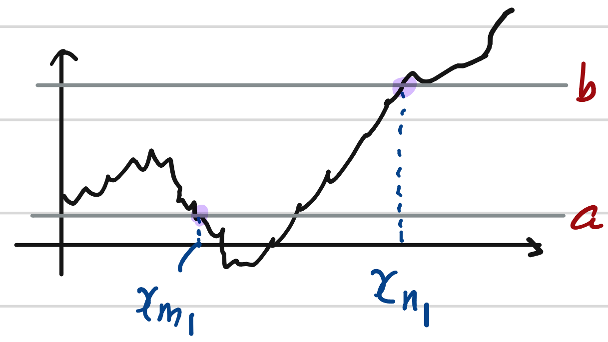
← チェックせよ

同様に、$E \in \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau'}$ より、$E[Z_N 1_E] = E[Z_{\tau'} 1_E]$

となるので、条件付き期待値の一意性より、$E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] = Z_\tau$ (a.s.). //

($E[Z_{\tau'} 1_E] = E[E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau] 1_E]$ ($\forall E \in \mathcal{F}_\tau$) をみたす $\mathcal{F}_\tau$-可測な r.v. が $E[Z_{\tau'} \mid \mathcal{F}_\tau]$)

ー マルチンゲール収束定理



$(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$: 数列

$-\infty < a < b < \infty$

に対して.

- $(x_n)_n$ が $[a,b]$ を N 回以上横断 (upcross) する.

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $0 \leq m_1 < n_1 < \cdots < m_N < n_N$ が存在して

$$x_{m_i} \leq a \text{ かつ } x_{n_i} \geq b \quad (1 \leq i \leq N).$$

- N 回以上横断し, $N+1$ 回以上横断しないとき, "N 回横断する" と言う

Lem

$\liminf_n x_n < \limsup_n x_n \iff {}^{\exists} a<b$ なる有理数で,
任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して,
$(x_n)_n$ が $[a,b]$ を N 回以上横断する.
つまり無限回横断する. //

(証明は容易なので省略) ← チェックせよ.

Thm (Doob のマルチンゲール収束定理)

$(X_n)_n$: 劣マルチンゲール, 可積分

$U_{[a,b]}(\omega) = U(\omega)$: $(X_n(\omega))_n$ が区間 $[a,b]$ を横断する回数

$$\Rightarrow \quad E[U] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{E[(X_n - a)_+]}{b-a}$$

← $(x-a)_+ = \max\{x-a, 0\}$

である. 特に,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E[(X_n)_+] < \infty$$

なら, ${}^{\exists} X \in L^1$ で,

$$X_n \longrightarrow X \quad (a.s.)$$

//

※ $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[(X_n)_+] < \infty$ (これは $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ が成り立てば成立) である劣マルチンゲールは あまり振動せず収束する.

(Proof)

$Y_n = \dfrac{(X_n - a)_+}{b-a}$ とする. Jensenの不等式より Y_n も可積分な劣マルチンゲール.

$N \in \mathbb{N}$ を任意に固定する.

$\tau'_0 = 0$ として、$k \in \mathbb{N}$ に対して、

$\tau_k = \inf\{n \geq \tau'_{k-1} \mid X_n \leq a\} \wedge N$

$\tau'_k = \inf\{n \geq \tau_k \mid X_n \geq b\} \wedge N$

とする. τ_k, τ'_k ともに停止時刻であることはすぐわかる. しかも有界である.

$U^{(N)}(\omega)$ を $(X_{n \wedge N}(\omega))_n$ が $[a,b]$ を横断する回数とする.

∵ $\tau'_N = N$ (時刻Nまでに N回以上横断できない)

$$U^{(N)} \leq \sum_{k=1}^{N} (Y_{\tau'_k} - Y_{\tau_k}) = Y_N - Y_0 - \sum_{k=1}^{N} (Y_{\tau_k} - Y_{\tau'_{k-1}})$$

$$\leq Y_N - \sum_{k=1}^{N} (Y_{\tau_k} - Y_{\tau'_{k-1}})$$

ここで. $\tau_k \geq \tau'_{k-1}$ より、Huntの定理から、$E[Y_{\tau_k} - Y_{\tau'_{k-1}}] \geq 0$ ($^\forall k$) である.

㊟ ここが非自明. 劣マ性と τ の有界性が効いている.

よって.

$$E[U^{(N)}] \leq E[Y_N].$$

あとは $N \to \infty$ とすることで単調収束定理から最初の不等式を得る.

(第二の主張)

$$E[|X_n|] = 2E[X_n^+] - E[X_n] \leq 2E[X_n^+] - E[X_0] \quad \text{—— } (*)$$

より, $\sup_n E[X_n^+] < \infty$ の仮定から $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ でもある.

このことから. $Y_n = \dfrac{(X_n - a)_+}{b-a}$ に対しても. $\sup_n E[Y_n] < \infty$ である.

これより.

$$E[U] < \infty$$

であり. 特に、$U[a,b] < \infty$ (a.s.). a,b の取り方は任意なので、

$\exists \Lambda \in \mathcal{F}$ s.t. $P(\Lambda) = 1$ かつ

$$U_{[a,b]}(\omega) < \infty \quad ({}^\forall a < b \in \mathbb{Q},\ {}^\forall \omega \in \Lambda)$$

可算無限個

とできる.

このことより、$^\forall \omega \in \Lambda$ において $\liminf X_n(\omega) = \limsup X_n(\omega)$ である。
(先のLem)

つまり $^\exists X(\omega) \in [-\infty, \infty]$ で

$$X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) \qquad (^\forall \omega \in \Lambda)$$

である。

再び(※)を用いて、Fatouより

$$E[|X|] = E[\liminf |X_n|] \leqq \liminf E[|X_n|]$$
$$\leqq \liminf (2E[X_n^+] - E[X_0])$$
$$< \infty$$

を得るので、$X \in L^1$ を得る。 //

<u>Cor</u>

$(X_n)_n$：マルチンゲール。

$^\exists X \in L^1$ で $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ とできる。

$\Longleftrightarrow$ $(X_n)_n$ が一様可積分（つまり $\lim_{M\to\infty} \sup_n E[|X_n| \mathbb{1}\{|X_n| \geqq M\}] = 0$） //

(Proof) ($\Rightarrow$) は省略

($\Leftarrow$) 一様可積分性より、Doobのマルチンゲール収束定理より、

$^\exists X \in L^1$ で $X_n \longrightarrow X$ (a.s.) である。

一様可積分な $(X_n)_n$ が $X_n \to X$ (a.s.) をみたすとき、

$X_n \xrightarrow{L^1} X$ でもある。

今、

$$\begin{cases} \cdot\ X_m = E[X_n | \mathcal{F}_m] & (^\forall n \geqq m) \\ \cdot\ |E[X_n | \mathcal{F}_m] - E[X | \mathcal{F}_m]| \leqq E[|X_n - X| \,|\, \mathcal{F}_m] \xrightarrow{n\to\infty} 0 & (\text{in } L^1) \end{cases}$$

なので、

$$X_m = E[X_n | \mathcal{F}_m] \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} E[X | \mathcal{F}_m]$$

である。よって、

$$X_m = E[X | \mathcal{F}_m] \quad (\text{a.s}) \qquad //$$

$(E[|X_m - E[X | \mathcal{F}_m]|] = 0 \Rightarrow X_m = E[X|\mathcal{F}_m] \ (\text{a.s}))$

※証明より、Corの条件のもとで $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ かつ $X_n \xrightarrow{L^1} X$ である。

逆に $X_n \xrightarrow{L^1} X \Rightarrow (X_n)_n$ は一様可積分かつ、$X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ も証明から分かる。

上の系と註をまとめると、以下を得る。

Cor

$(X_n)_n$ をマルチンゲールとする。

このとき以下は同値

(1) $(X_n)_n$ は L^1 内の収束列。つまり $\exists X \in L^1$ で $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

(2) $\sup_n E[|X_n|] < \infty$ かつ
$\exists X \in L^1$ で $X_n \xrightarrow{a.s.} X$（マルチンゲール収束定理より）かつ
$X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$.

(3) $\exists X \in L^1$ で、$X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$. ← この性質をマルチンゲールが閉であると言う (closed)

可閉, closable と言う.

(4) $(X_n)_n$ は一様可積分

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$, $\sup_n E[|X_n|] < \infty$, $X \in L^1$ であっても
$X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ とは限らない。
$(X_n)_n$ の一様可積分性がないと $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ は保証されない。
（逆に $X_n = E[X | \mathcal{F}_n]$ なら一様可積分）

各 n に対して $(\mathcal{F}_{m,n})_{m=0}^{n}$ を filtration とする.
各 $1 \leq m \leq n$ に対して、$X_{m,n} \in L^1$ が $\mathcal{F}_{m,n}$-可測 かつ
$E[X_{m,n} \mid \mathcal{F}_{m-1,n}] = 0$ みたすとき.
$(X_{m,n})_{m,n}$ を マルチンゲール差分列 (martingale difference array) という.

この時、$\left(\sum_{1\leq \ell \leq m} X_{\ell,n}\right)_{m=0}^{n}$ は $(\mathcal{F}_{m,n})_{m=0}^{n}$-マルチンゲールになる.

Thm (マルチンゲール中心極限定理)

$(X_{m,n})$: マルチンゲール差分列
以下を仮定する:

(i) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} E[X_{m,n}^2 \mid \mathcal{F}_{m-1,n}] \xrightarrow{p} 1 \quad (n\to\infty)$

(ii) $\displaystyle{}^\forall \varepsilon>0, \ \sum_{m=1}^{n} E[X_{m,n}^2 \mathbb{1}\{|X_{m,n}|\geq \varepsilon\} \mid \mathcal{F}_{m-1,n}] \xrightarrow{p} 0 \quad (n\to\infty)$

Lindberg の条件

この時、

$$\sum_{m=1}^{n} X_{m,n} \rightsquigarrow N(0,1) \quad (n\to\infty)$$

//

(証明は Hall and Hyde (1980), "Martingale Limit Theory and Its Application" Cor. 3.1 とその後の Remark)

これは i.i.d. の CLT を特別な例として含む.
$(X_i)_{i=1}^{\infty}$ が i.i.d. r.v.s で $E[X_i]=0$, $Var[X_i]=\sigma^2$ のとき、

$$X_{m,n} = \frac{X_m}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \mathcal{F}_{m,n} = \sigma(X_1,\dots,X_m)$$

とすれば、

- $E[X_{m,n} \mid \mathcal{F}_{m-1,n}] = 0$
- $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} E[X_{m,n}^2 \mid \mathcal{F}_{m-1,n}] = n E\left[\frac{1}{n\sigma^2}X_1^2\right] = 1$
- $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} E[X_{m,n}^2 \mathbb{1}\{|X_{m,n}|\geq\varepsilon\} \mid \mathcal{F}_{m-1,n}] = n\cdot E\left[\frac{1}{n\sigma^2}X_1^2 \mathbb{1}\{|X_1|\geq\sqrt{n}\sigma\varepsilon\}\right]$
  $\displaystyle= \frac{1}{\sigma^2}E[X_1^2\mathbb{1}\{|X_1|\geq\sqrt{n}\sigma\varepsilon\}] \longrightarrow 0$ (優収束定理)

で. CLT が成り立つ.

連続時間マルチンゲール

$(X_n)_{n=0}^{\infty}$ の代わりに $(X_t)_{t\geq 0}$ に対して同様にマルチンゲールが定義できる: $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ (a.s.) ($^\forall t > {}^\forall s$).
同様に劣マ, 優マ が定義される.
右連続なパスを持つ劣マルチンゲールに対しては
任意抽出定理, Doobの不等式, マルチンゲール収束定理が成り立つ.

Thm

Brown運動 $B = (B_t)_{t\geq 0}$ は $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s | s \in [0,t]\})$ に対してマルチンゲール //

(Proof)

$B_t \sim N(0,t)$ より $B_t \in L^1$ で B_t は $\mathcal{F}_t$-可測.
$t > s$ に対して

$$E[B_t | \mathcal{F}_s] = E[B_s + \underbrace{B_t - B_s}_{\mathcal{F}_s\text{と独立}} | \mathcal{F}_s]$$

$$= B_s + E[B_t - B_s] = B_s$$ //

Thm

$\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s \mid s \in [0,t]\})$ とする.
$f \in \mathcal{L}^2([0,T])$ に対して $X_t = \int_0^t f_s dB_s$ とおくと、
$(X_t)_{t\in[0,T]}$ は $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ に関してマルチンゲール. //

(Proof)

$X_t \in L^2$ かつ X_t は $\mathcal{F}_t$-可測 なので
$E[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$ を示せば良い.
近似する単過程の確率積分を $X_t^{(n)}, X_s^{(n)}$ と書けば
$^\forall A \in \mathcal{F}_s$ に対し,

$E[X_t - X_s, A]$ ← $E[(X_t - X_s)1_A]$ の意

$$= \underbrace{E[X_t - X_t^{(n)}, A]}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{E[X_s^{(n)} - X_s, A]}_{\downarrow \atop 0} + \underbrace{E[X_t^{(n)} - X_s^{(n)}, A]}_{= 0}$$

$\longrightarrow 0$

(∵ Brown 運動のマルチンゲール性) //

※ 逆に $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ に関するマルチンゲールが $X_t \in L^2$ をみたすなら、
$\exists f \in \mathcal{L}^2([0,T])$ s.t.

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s dB_s \quad (t \in [0,T]).$$

(マルチンゲール表現定理)