確率数理工学8

◎ 確率不等式

Thm ☆ 重要

(1) Markovの不等式

X : r.v.

$X \geq 0$ (a.s.) とする.

$\forall \varepsilon > 0$ で

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$$

(2) Chebyshevの不等式

$$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2}$$

Proof (1)

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X \mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\} + X \mathbb{1}\{X < \varepsilon\}] \\ &\geq E[\varepsilon \mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\}] + 0 \\ &= \varepsilon \cdot E[\mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\}] = \varepsilon P(X \geq \varepsilon) \quad // \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) &= P(|X - E[X]|^2 \geq \varepsilon^2) \\ &\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{E[|X - E[X]|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{Var[X]}{\varepsilon^2} \quad // \end{aligned}$$

例. $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (X_i : i.i.d., $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$)

$\Longrightarrow Var[X] = \frac{1}{n}\sigma^2 \Longrightarrow P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

$\Longrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon'$ とおきなおせば. $P\left(|X - E[X]| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon'\right) \leq \frac{1}{\varepsilon'^2}$

$\Longrightarrow |X - E[X]| = O_p\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$: 重要

Cor（Markovの不等式の一般化）

φ：単調増加かつ $\varphi(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$，可測

$$P(X\geqq a)\leqq\frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)}\quad(\forall a\in\mathbb{R})$$

(∵) Markovの不等式より $P(X\geqq a)=P(\varphi(X)\geqq\varphi(a))\leqq\dfrac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)}$ //

Cor
$$P(X\geqq a)\leqq\frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}}\quad(\forall t\geqq 0,\ a\in\mathbb{R})$$

※ モーメント母関数を用いてXの裾確率が評価できる．

⟶ 様々な確率集中不等式に用いられている．

Thm（Hoeffdingの不等式）☆　←同一である必要はない

$X_1,\dots,X_n$：独立 s.t. $a\leqq X_i\leqq b$ $(\forall i=1,2,\dots,n)$

$E[X_i]=0$ とする．

このとき．
$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\geqq\varepsilon\right)\leqq\exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

$$\left(P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|\geqq\varepsilon\right)\leqq 2\exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)\text{ でもある}\right)$$

Note
$$\varepsilon=\frac{b-a}{\sqrt{2n}}t\quad\text{とおけば}$$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|\geqq\frac{b-a}{\sqrt{2n}}t$$

である確率が $2e^{-t^2}$ 以下である． $\Longrightarrow$ $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

⟶ 大数の法則，中心極限定理

☆ 先のChebyshevの不等式と比べ，裾確率が

$O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ではなく $O(e^{-t^2})$ になっている．

（2乗）　　（指数）

⟶ X_i の有界性を用いてよりタイトな裾確率評価になっている．

Proof $P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqq \varepsilon\right) \leqq \dfrac{E[e^{t\sum X_i}]}{e^{nt\varepsilon}} \quad (t>0)$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}]}{e^{nt\varepsilon}} \quad (\because 独立)$$

$E[e^{tX_i}]$ を評価する.

$a \leqq X_i \leqq b$ より. $X_i = \alpha b + (1-\alpha) a$ $\left(\alpha = \frac{X_i - a}{b-a} と書く\right)$

$\Downarrow$

$\boxed{0 \leqq \alpha \leqq 1}$

$x \mapsto e^{tx}$ の凸性より

$$e^{tX_i} \leqq \alpha e^{tb} + (1-\alpha) e^{ta}$$

である. 右辺の期待値をとると.

$$E[e^{tX_i}] \leqq E[\alpha] e^{tb} + E[1-\alpha] e^{ta}$$

$$= -\frac{a}{b-a} e^{tb} + \frac{b}{b-a} e^{ta}$$

$$= p e^{tb} + (1-p) e^{ta}$$

$$\left(ただし.\ p = -\frac{a}{b-a} \geqq 0\right)$$

$\psi(t) = \ln\left(p e^{tb} + (1-p) e^{ta}\right)$ とおくと

これは $P(Z=b)=p$, $P(Z=a)=1-p$ なる Z のキュムラント~~母~~関数

$\psi(0) = \ln(1) = 0$

$$\psi'(0) = \left.\frac{pbe^{tb} + (1-p)ae^{ta}}{pe^{tb} + (1-p)e^{ta}}\right|_{t=0} = 0 \quad (平均)$$

$$\psi''(t) = \frac{pb^2 e^{tb} + (1-p)a^2 e^{ta}}{pe^{tb} + (1-p)e^{ta}} - \frac{(pbe^{tb} + (1-p)ae^{ta})^2}{(pe^{tb} + (1-p)e^{ta})^2}$$

$\Rightarrow$ $p_t = \dfrac{pe^{tb}}{pe^{tb} + (1-p)e^{ta}}$ とおき.

Z_t を $P(Z_t = b) = p_t$, $P(Z_t = a) = 1 - p_t$ なる r.v. とおくと.

$$\psi''(t) = b^2 p_t + a^2(1-p_t) - (b p_t + a(1-p_t))^2$$

$$= Var[Z_t] = Var\left[Z_t - \frac{a+b}{2}\right] \leqq E\left[\left(Z_t - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leqq \frac{(a-b)^2}{4}$$

すると、

$$\psi(t) = \psi(0) + t\psi'(0) + \frac{1}{2}t^2\psi''(\bar{t}) \quad (0 \leq \bar{t} \leq t)$$

$$\leqq 0 + 0 + \frac{1}{8}t^2(a-b)^2$$

よって、

$$E[e^{tX_i}] \leqq \exp\left(\frac{t^2}{8}(b-a)^2\right) \quad (^{\forall}t \geqq 0)$$

これより

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}]}{e^{tn\varepsilon}} \leqq \exp\left(\frac{nt^2}{8}(b-a)^2 - tn\varepsilon\right)$$

ここで、$t = \frac{4\varepsilon}{(b-a)^2}$ を代入すれば

$$\text{右辺} \leqq \exp\left(\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2} - \frac{4n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

- $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|$ については $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right| \geqq \varepsilon\right) \leqq P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \geqq \varepsilon\right) + P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(-X_i) \geqq \varepsilon\right)$ から従う。 //

Note

- $a_i \leqq X_i \leqq b_i$ のように a, b が i に依存するとき、

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \geqq \varepsilon\right) \leqq \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right)$$

と拡張できる。

- 証明より

$$E[e^{tX_i}] \leqq e^{\frac{t^2}{2}\sigma^2} \quad (^{\forall}i) : \text{sub-Gaussian}$$

← Gaussより裾が軽ければ成り立つ

なら、X_i が有界でなくても

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \geqq \varepsilon\right) \leqq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

が成り立つ。

Thm (Bernsteinの不等式)

$X_1, \dots, X_n$: 独立（同一とは限らない）

$E[X_i]=0$, $\mathrm{Var}[X_i] \leqq \sigma^2$, $|X_i| \leqq M$ (a.s.)

なら、

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqq t\right) \leqq \exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2 + \frac{2M}{3}t}\right) \quad (t \geqq 0)$$

$\Longrightarrow$ 分散の情報を活かしている。

分散が小さければ、よりタイトなバウンドを得る。

※ Hoeffding, Bernstein およびその拡張は統計や学習理論で頻繁に用いられている。

$\boxed{\text{参考}}$ **Thm** (Gaussian集中不等式)

$X_1, \dots, X_N$ は独立同一に標準正規分布に従うとする。

$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ が L-リプシッツ連続とする。

$$P\left(f(X_1, \dots, X_n) - E[f(X_1, \dots, X_n)] \geqq t\right) \leqq e^{-\frac{t^2}{2L^2}} \quad (\forall t > 0)$$

※ 確率が次元 n に依存しない！

ある有界な関数クラス $\mathcal{G}$ に対し

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sup_{g \in \mathcal{G}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i g(z_i) \quad (z_i \text{は固定})$$

として用いたりする。 $\longrightarrow$ ノンパラ回帰、学習理論で現れる (Gaussian width)

Thm (Talagrandの集中不等式)

$\mathcal{G}$: $\|\cdot\|_\infty$-ノルムに関して可分な関数クラス

$\forall g \in \mathcal{G}$ で $E[g(X)]=0$, $\mathrm{Var}[g] \leqq \sigma^2$, $\|g\|_\infty \leqq M$ なら

$$P\left(\sup_{g \in \mathcal{G}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \geqq 2E\left[\sup_{g \in \mathcal{G}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right] + \sqrt{\frac{2t\sigma^2}{n}} + \frac{2M}{n}t\right) \leqq e^{-t}$$

$\longrightarrow$ これも頻出の不等式

② 確率変数列の収束 ☆重要

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: prob. sp.

$X_1, X_2, \ldots$: r.v. の列 on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

X: 別の r.v.

F_k: X_k の分布関数

F: X の分布関数

Def (確率変数列の収束) ☆重要

1. 概収束 (convergence almost surely)

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \overset{def}{\iff} P\left(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$$

2. 確率収束 (convergence in probability)

$$X_n \xrightarrow{p} X \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geqq \varepsilon) = 0$$

3. p次平均収束, L^p-収束 (conv. in p-th degree mean, conv. in L^p)

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \overset{def}{\iff} \|X_n - X\|_p \longrightarrow 0 \qquad (p \geq 1)$$

4. 法則収束 (convergence in law, distribution weak convergence)

$$X_n \rightsquigarrow X \overset{def}{\iff} \text{全ての } F(x) \text{ の連続点 } x \text{ において}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

※ ・ L^p-空間は L^p-収束に関して完備 (任意のコーシー列が L^p-空間内で収束先を持つ)

$\Longrightarrow$ L^p-空間は Banach 空間

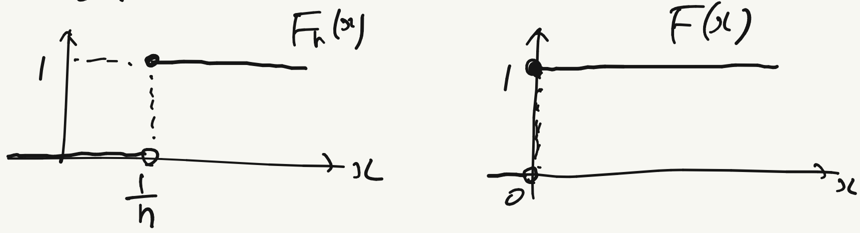
- 法則収束について

  - Fの連続点についてのみ定義している理由：

    X_n を $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$ なる r.v.

    X を $P(X=0)=1$ なる r.v.

    とする。



    $\frac{1}{n} \to 0$ より、$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ と思いたい。

    しかし、$\underbrace{\lim_{n\to\infty} F_n(0)}_{=0} \neq \underbrace{F(0)}_{=1}$ より 不連続点 $x=0$ では

    収束が成り立たない。 → 不連続点は除外した方が都合良い。

  - 弱収束とも言う。

    別定義（Portmanteauの定理）

    - $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff {}^\forall f$：有界連続 に対し、
      $$E[f(X_n)] \longrightarrow E[f(X)]$$

    - 任意の閉集合Aに対し、
      $$\limsup P(X_n \in A) \leq P(X \in A)$$

    - 任意の開集合Bに対し、
      $$\liminf P(X_n \in B) \geq P(X \in B)$$

(cf. C_0：有界連続関数 で $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ なる関数の集合

C_0 上の任意の有界線形写像 Φ は

ある正則 Borel 測度 μ を用いて

$$\Phi(f) = \int f \, d\mu$$

と書ける。　　　　（Rieszの表現定理）)

$\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ （非負Borel測度）

補足

μ^*: μ により定めた外測度

Def.

(1) μは正則Borel $\Leftrightarrow$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ s.t. $A \subseteq B$ かつ $\mu^*(A) = \mu(B)$.

(2) μはRadon $\Leftrightarrow$ 正則Borelかつ、任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ に対し、$\mu(K) < \infty$.

C_c: コンパクト台を持つ有界連続関数の集合.

Thm（リースの表現定理）

$L: C_c \to \mathbb{R}$ を線形汎関数とし、

$$\sup\{ L(f) \mid f \in C_c,\ \|f\|_\infty \leq 1,\ \mathrm{supp}(f) \subseteq K \} < \infty$$

が任意のコンパクト集合 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して成り立つものとする

すると、あるRadon測度 μ と、μ-可測関数 σ で $|\sigma(x)| = 1$ (μ-a.e) なるものが存在して、

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \sigma \, d\mu$$

とできる.

Radon測度の汎弱収束 (weak*-convergence)

以下は同値.

(1) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu$ ($\forall f \in C_c$)

(2) 任意のコンパクト集合 K に対し、$\displaystyle \limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)$ かつ任意の開集合 U に対し、$\displaystyle \mu(U) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(U)$.

(3) $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \mu_k(B) = \mu(B)$ が任意の有界ボレル集合 B で $\mu(\partial B) = 0$ なる B に対して成り立つ.

narrow topologyにおける測度の収束（狭位相）

$$\lim_{k\to\infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu \quad (\forall f: \text{有界連続})$$

有界な場合：
（つまり、$\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$, $\mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$ のとき）

1. $\mu_n \to \mu$（狭位相）
2. $\mu_n \to \mu$（汎弱）かつ $\mu_n(\mathbb{R}^d) \to \mu(\mathbb{R}^d)$

は同値. $\Rightarrow$ 確率測度なら等価

汎弱収束しても狭位相で収束しない例

$f(x) = \sin(\pi x + \frac{\pi}{2})$, $\mu_k = \delta_k$, $\mu = 0$ とすると、$\delta_k \to \mu$（汎弱）でも $\delta_k \not\to \mu$（狭位相）.

Thm (収束間の関係性)

(1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X \implies X_n \xrightarrow{p} X$

(2) $X_n \xrightarrow{p} X \implies X_n \rightsquigarrow X$

(3) $X_n \xrightarrow{L^p} X \implies X_n \xrightarrow{p} X$

$$\begin{tikzcd} \text{概収束} \arrow[r] & \text{確率収束} \arrow[r] & \text{法則収束} \\ & L^p\text{-収束} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Proof (1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ は

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{m} \right\}\right) = 1$$

↑ 任意の m に対し、ある N が存在して、任意の $n \geqq N$ で $|X_n - X| \leqq \frac{1}{m}$ が成立する事象

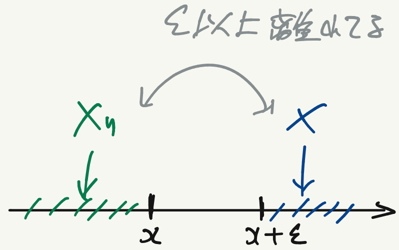
と書き直せる。よって、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、十分大きな m_0 をもってくれば $\frac{1}{m_0} \leq \varepsilon$ とできて、

$$\begin{aligned}
1 &= P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \{\cdots\}\right) \\
&\leqq P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leqq \frac{1}{m_0} \right\}\right) \\
&= \lim_{N \to \infty} P\left(\bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leqq \frac{1}{m_0} \right\}\right) \\
&\leqq \lim_{N \to \infty} P\left(\left\{ |X_N - X| \leqq \frac{1}{m_0} \right\}\right) \\
&\leqq \lim_{N \to \infty} P\left(\left\{ |X_N - X| \leqq \varepsilon \right\}\right)
\end{aligned}$$

つまり、$X_n \xrightarrow{p} X$ である。

(2) x を F の連続点とする.

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &= P(X_n \leqq x) \\
&= P(\{X_n \leqq x\} \cap \{X \leqq x+\varepsilon\}) \\
&\quad + P(\{X_n \leqq x\} \cap \{X > x+\varepsilon\}) \\
&\leqq \underbrace{P(X \leqq x+\varepsilon)}_{= F(x+\varepsilon)} + \underbrace{P(|X_n - X| \geqq \varepsilon)}_{\to 0 \ (n\to\infty)} \quad (\because X_n \xrightarrow{P} X)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
F(x-\varepsilon) &= P(X \leqq x-\varepsilon) \\
&= P(\{X \leqq x-\varepsilon\} \cap \{X_n \leqq x\}) \\
&\quad + P(\{X \leqq x-\varepsilon\} \cap \{X_n > x\}) \\
&\leqq \underbrace{P(X_n \leqq x)}_{= F_n(x)} + \underbrace{P(|X - X_n| \geqq \varepsilon)}_{\to 0 \ (n\to\infty)}
\end{aligned}
$$

以上より $F(x-\varepsilon) \leqq \liminf F_n(x) \leqq \limsup F_n(x) \leqq F(x+\varepsilon)$

F は連続なので $\varepsilon \to 0$ とすることで

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

を得る.

(3). Markov の不等式より

$\forall \varepsilon > 0$ で: $P(|X_n - X| \leqq \varepsilon) \leqq \dfrac{E[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \longrightarrow 0$

$(\because X_n \xrightarrow{L^p} X)$

注 弱収束においては X_n と X は同じ prob. sp. 上にいる必要はない.
確率収束と概収束は同じ prob. sp. にいる.

反例

(1) の逆が成り立たない例

(各 n でみると, X_n と X は十分近いが, $(X_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$ と, n を通しての列を考えると $X(\omega)$ に収束しない状況を考えれば良い.)

$\Omega=[0,1)$, P は Ω 上の一様分布

$n=1,2,2^2,2^3,\dots$ とする. $(n=2^k)$

$$X_{n,i} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \left(\frac{i-1}{n} \leqq \omega < \frac{i}{n}\right) \\ 0 & \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases} 1 & (\omega\in A) \\ 0 & (\omega\notin A) \end{cases}$$

$k=0$: $X_1 = X_{1,1} = 1$ (a.s.)

$k=1$: $X_2 = X_{2,1} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}$

$X_3 = X_{2,2} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)}$

$k=2$: $X_4 = X_{4,1} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4})}$

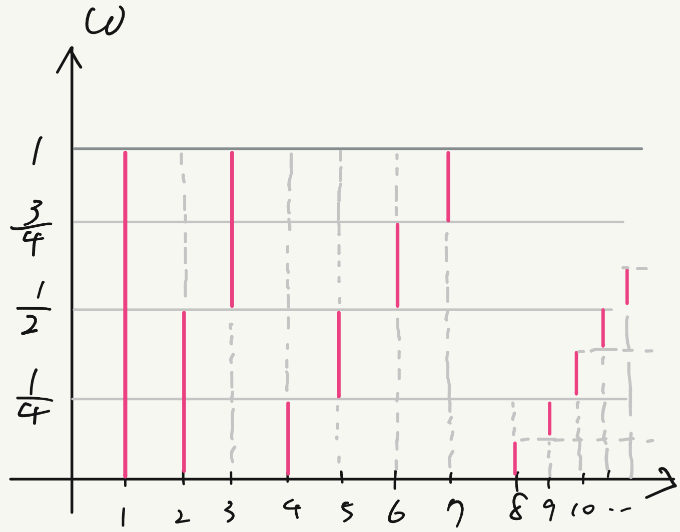
$X_5 = X_{4,2} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$

$X_6 = X_{4,3} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$

$X_7 = X_{4,4} = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1)}$

$k=3$: $X_8 = X_{8,1} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{8})}$

$\vdots$



― で 1, それ以外で 0.

とすると $P(|X_m|\geqq\varepsilon) \leqq \frac{1}{2^k}$ (if $2^k \leq m < 2^{k+1}$) $(0<{}^{\forall}\varepsilon<1)$

より $X_m \xrightarrow{P} 0$

しかし, ${}^{\forall}\omega\in[0,1)$ において, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)=1$,

$\displaystyle\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega)=0$ なので.

a.s. で収束もしない. よって, $X_n \xrightarrow{a.s.} X=0$ は成り立たない. //

(2) の逆が成り立たない例.

$\Omega = \{0, 1\}$ として. $P(\omega=0) = P(\omega=1) = \frac{1}{2}$ とする.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega=0) \\ 0 & (\omega=1) \end{cases}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega=0) \\ 1 & (\omega=1) \end{cases}$$

とすると. 当然 $|X_n - X| = 1$ (a.s.) なので. $X_n \xrightarrow{P} X$ ではない.

しかし. $F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases} = F(x)$ より.

$F_n(x) = F(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ で. 特に. $X_n \rightsquigarrow X$ である. //

$\lim F_n(x) = F(x)$ でもある.

演習問題

(1) $X_n \xrightarrow{P} X$ なら、ある部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が存在して、

$X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$ とできることを示せ。

（ヒント：Borel-Cantelli の補題：ノート9）

(2) $\left[\begin{array}{l} (X_n) \text{ が確率収束の意味でコーシー列 (コーシー in prob.)} \\ \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \text{ に対し、} \exists N \text{ で} \\ \qquad P(|X_n - X_m| \geq \varepsilon) \leq \delta \quad (\forall n, m \geq N) \end{array} \right]$

とする。

(a) $X_n \xrightarrow{P} X$ なら $(X_n)_n$ はコーシー列 in prob. であることを示せ。

(b) $(X_n)_n$ がコーシー in prob. のとき、ある r.v. X が存在し、

$X_n \xrightarrow{P} X$ となることを以下の手順で示せ：

(i) ある部分列 $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ が存在して、

$$P(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}) < 2^{-j}$$

とできることを示せ。

(ii) X_{n_j} は a.s. で収束することを示せ（ヒント：Borel-Cantelli）

その収束先を X とおく。（X は可測）

(iii) $X_n \xrightarrow{P} X$ を示せ。

(3)「$(X_n)_n$ が一様可積分 $\Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{a \to \infty} \sup_n \int_{|X_n| \geq a} |X_n| \, dP \to 0$」

とする。

(X_n) が一様可積分なら、$\displaystyle\sup_n E[|X_n|] < \infty$ となることを示せ。

(4) X_n は単調増大な r.v. で $X_n \xrightarrow{P} X$ とする。

このとき、$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ であることを示せ。

(5) $X_n \xrightarrow{p} X \iff$ 任意の部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が、さらなる部分列 $(X_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ を持ち、$X_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.s.} X$ である。

このことを示せ。

(6) $X_n \xrightarrow{p} X,\ Y_n \xrightarrow{p} Y$ のとき、

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$ を示せ。

(b) $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$ を示せ ((5)を用いて良い)

(7) $(X_n)_n$: i.i.d. で $E[X_n] = \mu,\ Var[X_n] = \sigma^2$ (ともに有限) のとき、

$$\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$$

となることを示せ。

(8) 以下を示せ：

(a) $X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \implies \overline{X}_n \left(= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \xrightarrow{a.s.} 0$

(b) $X_n \xrightarrow{L^p} 0 \implies \overline{X}_n \xrightarrow{L^p} 0$
$(p \geqq 1)$

(c) $X_n \xrightarrow{p} 0 \implies \overline{X}_n \xrightarrow{p} 0$ とは限らないことを反例を挙げて示せ。

(d) $\overline{X}_n \xrightarrow{p} 0 \implies \dfrac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0$

(9) (発展問題) $S \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とする。

S 上のガウス過程 G_u $(u \in S)$ とは、任意の有限個の $\{u_1, \ldots, u_\ell\} \subset S$ に対し、$(G_{u_1}, \ldots, G_{u_\ell})$ が多変量正規分布に従うこととする。

ある2つのS上のGauss過程 G_u, G'_u が

(i) $E[G_u] = E[G'_u] = 0 \quad (\forall u \in S)$

(ii) $E[(G_u - G_v)^2] \leqq E[(G'_u - G'_v)^2] \quad (\forall u, v \in S)$

をみたし. G_u, G'_u がともに a.s. で u について有界かつ連続であるとする. このとき.

$$E[\sup_{u\in S} G_u] \leqq E[\sup_{u \in S} G'_u]$$

となることが知られている. (Slepianの不等式)

今. S^{d-1} を $\mathbb{R}^d$ 上の単位球面 ($S^{d-1} = \{\|x\| = 1 \mid x \in \mathbb{R}^d\}$) とする.

$(A_{ij})_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq d}$ を A_{ij} が i.i.d. で $N(0,1)$ に従うランダム行列とする.

ある $u \in S^{d-1}, v \in S^{d-1}$ に対し.

$$G_{(u,v)} := u^T A v$$

とする. 一方で. g, g' を独立な $\mathbb{R}^d$-値 r.v. とし. $g \sim N(0, I), g' \sim N(0, I)$ (多変量正規分布) とする.

$$G'_{(u,v)} := u^T g + v^T g'$$

としたとき.

$$E[\sup_{(u,v)\in S^{d-1}\times S^{d-1}} G_{(u,v)}] \leqq E[\sup_{(u,v)\in S^{d-1}\times S^{d-1}} G'_{(u,v)}]$$

を示せ. また.

$$E[\|A\|] \leqq 2\sqrt{d}$$

operator-norm

$$\|A\| := \sup_{\substack{u\in S^{d-1}\\ v\in S^{d-1}}} u^T A u$$

を示せ.

(10) (9)の設定で、Gaussian集中不等式より

(参考問題)

$$P\left(\|A\| \geq 2\sqrt{d} + t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (t>0)$$

を示せ。(ランダム行列の作用素ノルム)

(11) X_i を i.i.d.、非負の r.v. とする。

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$ とする。

(a) $P(M_n > x) \leq nP(X_1 > x) \quad (^\forall x > 0)$ を示せ。

(b) $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \iff nP(X_1 > n) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

を示せ。