演習解答9

(1) ($\Rightarrow$) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ は $|X_n - X| \xrightarrow{a.s.} 0$ でもある。
つまり、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\limsup |X_n - X| \leqq \varepsilon$ (a.s.)
である。これは $\lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} |X_k - X| \leqq \varepsilon$ (a.s.) である。よって、

$$0 = P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |X_k - X| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{k\geq n}|X_k - X| > \varepsilon\right)$$
$(\forall \varepsilon > 0)$

であり、これはすなわち、$\sup_{k\geq n}|X_k - X| \xrightarrow{P} 0$ である。

($\Leftarrow$) 前回演習(4)より、単調増大なr.v. Y_n が $Y_n \xrightarrow{P} Y$ なら
$Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$ である。同様に単調減少(単調非増加)な
Y_n が $Y_n \xrightarrow{P} Y$ なら $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$ である。
今、$Y_n = \sup_{k\geq n} |X_k - X|$ とすれば、Y_n は単調列で $Y_n \xrightarrow{P} 0$
である。よって、$Y_n \xrightarrow{a.s.} 0$ になる。よって

$$\sup_{k\geq n} |X_k - X| \geqq |X_n - X| \xrightarrow{a.s.} 0$$

である。

(2) (i) $m > n$ のとき、$S_m - S_n = \sum_{i=n}^{m} a_i X_i$ で、$\|S_m - S_n\|_{L^2(P)} = \sqrt{\sum_{i=n}^{m} a_i^2}$
である。

($\Leftarrow$) 上の式と $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ より、$(S_n)_n$ は L^2-空間内でコーシー列
になっている。L^2-空間はBanach空間なのでコーシー列には
収束先があって、L^2-空間内で収束する。

($\Rightarrow$) S_n が L^2-収束 $\Longleftrightarrow$ $(S_n)_n$ は L^2-内でコーシー列 (証明は省略)
つまり、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\exists N$ で、$\forall m, n \geqq N$ $(m > n)$ で $\sqrt{\sum_{i=n}^{m} a_i^2} \leqq \varepsilon$
とできる。よって、特に、$\sum_{i=n}^{\infty} a_i^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=n}^{m} a_i^2 \leqq \varepsilon^2$ で、

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 + \varepsilon^2 < \infty$$ を得る。

(ii) Kolmogorov の定理より $\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$, $\sum_{n=1}^{\infty} Var[X_n]$ がともに収束するなら、$\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ は概収束する。($Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ は概収束する)

今 各 X_n は $E[X_n]=0$ を満たすので、$\sum_{n=1}^{\infty} E[a_n X_n] = 0$ である。

一方 $\sum_{n=1}^{\infty} Var[a_n X_n] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ でもある。(仮定より)

よって、Kolmogorov の定理より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ は概収束する。

(3) X_n の特性関数は $\phi_n(t) = e^{i\mu_n t - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2}}$ である。

0 の特性関数は $\phi(t) = 1$ $({}^\forall t)$ である。

よって、$X_n \rightsquigarrow 0 \iff \phi_n(t) \to \phi(t)$ $({}^\forall t \in \mathbb{R}) \iff i\mu_n t - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2} \longrightarrow 0$ $({}^\forall t)$

$\iff \mu_n t \longrightarrow 0,\ \frac{\sigma_n^2 t^2}{2} \longrightarrow 0$ $({}^\forall t \in \mathbb{R}) \iff \mu_n \longrightarrow 0,\ \sigma_n^2 \longrightarrow 0$

//

(4)

($\Leftarrow$) Kolmogorov の定理より、すぐに従う。

($\Rightarrow$) $\sum_n X_n$ が a.s. で収束するなら、${}^\exists X$ r.v. で $\sum_{k=1}^{n} X_k \rightsquigarrow X$ である。

X の c.f. を $\phi(t)$ とし、$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ の c.f. を $\phi_n(t)$ とすると、

$\phi_n(t) = e^{it\sum_{i=1}^{n}\mu_i - \frac{t^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)}$ である。$Y_n \rightsquigarrow X$ より、

$\phi_n(t) \longrightarrow \phi(t)$ $({}^\forall t \in \mathbb{R})$ であり、log の連続性より、

$\log\phi_n(t) \longrightarrow \log\phi(t)$ $({}^\forall t \in \mathbb{R})$ でもある。つまり、$it\sum_{i=1}^{n}\mu_i - \frac{t^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)$ はある有限の値に収束する。たとえば $t=1$ とすることで、

$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i$, $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2$ はある有限の値に収束しないといけない。

//

(5) x_0 の定義より、${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し、$F(x_0 - \varepsilon) < 1$。

$F(x_0-\varepsilon) = p$ とおくと、$A_n = \{\max(X_1, \dots, X_n) \leqq x_0 - \varepsilon\}$ は、

$P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leqq x_0 - \varepsilon\}\right) = p^n$ である。

$p<1$ なので $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ である。よって Borel-Cantelli より

$P(A_n\ i.o.) = 0$ である。すなわち、$P(\liminf_{n\to\infty} \max(X_1, \dots, X_n) \leqq x_0 - \varepsilon) = 0$

ε は任意なので、$\liminf \max(X_1, \dots, X_n) \geqq x_0$ (a.s.)。

一方、$\max(X_1, \dots, X_n) \leqq x_0$ (a.s.) でもあるので、$\max(X_1, \dots, X_n) \longrightarrow x_0$ (a.s.)

//

(6) $T_k - T_{k-1} = N_k$ とおくと、 $P(N_k = j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \cdot \frac{n-k+1}{n}$

である。(負の二項分布)

$j-1$ 回、これまで獲得した $k-1$ 個のアイテムを選び、j 回目に、残りの $n-k+1$ 個のアイテムのうちどれかを選ぶ。

$T_n = N_n + N_{n-1} + \cdots + N_1$ である。(ただし、$T_0 = 0$ とする。)

また $(N_k)_{k=1}^{n}$ は独立である。

負の二項分布の平均、分散より

$$E[N_k] = \frac{\frac{k-1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n}} \cdot \frac{n}{k-1} = \frac{n}{n-k+1}$$

$$Var[N_k] = \frac{(k-1)/n}{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^2} \cdot \frac{n}{k-1} = \frac{n^2}{(n-k+1)^2}$$

$$E[T_n] = \sum_{k=1}^{n} E[N_k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

より、 $n \log(n+1) \leq E[T_n] \leq n(\log(n) + 1)$ である。

一方、

$$Var\left[\frac{T_n}{n\log(n)}\right] = \frac{1}{n^2 \log(n)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n-k+1)^2} = \frac{1}{\log(n)^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

以上より

$$E\left[\frac{T_n}{n\log(n)}\right] \longrightarrow 1 \text{ かつ } Var\left[\frac{T_n}{n\log(n)}\right] \longrightarrow 0 \text{ である。}$$

すなわち、 $\frac{T_n}{n\log(n)} \xrightarrow{P} 1$ である。

(7) ($\Rightarrow$) $X_n \rightsquigarrow X$ より、X は非負整数にのみ値を取る。(定義からすぐ確認できる)

k：非負整数に対して、

$F_n\left(k + \frac{1}{2}\right) \longrightarrow F\left(k + \frac{1}{2}\right) = P\left(X \leq k + \frac{1}{2}\right)$

$F_n\left(k - \frac{1}{2}\right) \longrightarrow F\left(k - \frac{1}{2}\right) = P\left(k - \frac{1}{2} \leq X\right)$

で、X は非負整数に値を取るので、 $P(X = k) = F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F\left(k - \frac{1}{2}\right)$

である。よって、 $P(X_n = k) = F_n\left(k + \frac{1}{2}\right) - F_n\left(k - \frac{1}{2}\right) \longrightarrow F\left(k + \frac{1}{2}\right) - F\left(k - \frac{1}{2}\right)$

$= P(X = k)$

($\Leftarrow$) $k \leq x < k+1$ なら、 $F_n(x) = F_n(k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_n = i) \longrightarrow \sum_{i=0}^{k} P(X = i) = F(x)$

より、${}^{\forall} x \in \mathbb{R}$ で $F_n(x) \longrightarrow F(x)$

(8) $0 \le x < 1$ に対し、 $F_n(x) = P(\mathbb{1}_{A_n} \le x) = 1 - P(A_n)$

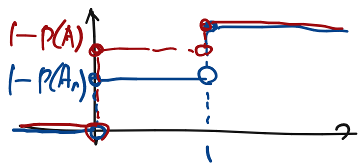
$F(x) = P(\mathbb{1}_A \le x) = 1 - P(A)$

$x < 0$ に対し、 $F_n(x) = F(x) = 0$

$x \ge 1$ に対し、 $F_n(x) = F(x) = 1$ である。

よって、

$$\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{w} \mathbb{1}_A \iff 1 - P(A_n) \longrightarrow 1 - P(A) \iff P(A_n) \longrightarrow P(A)$$



(9) X_1, Y_1, X_2, Y_2 を i.i.d. な r.v. とし、X, Y と同じ分布に従うとする。

仮定より、$\dfrac{X_1+Y_1}{\sqrt{2}}$ と $\dfrac{X_2+Y_2}{\sqrt{2}}$ も独立で、X, Y と同じ分布に従う

すると、さらに仮定より

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X_1+Y_1}{\sqrt{2}} + \frac{X_2+Y_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4}}(X_1+Y_1+X_2+Y_2)$$

は X, Y と同じ分布に従う。このことを繰り返すと、

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=1}^{2^n} X_i \sim X \quad (X_i \text{ は } X \text{ と同じ分布に従う i.i.d. な r.v.})$$

↑同分布を持つという意味

である。$E[X_i]=0$, $Var[X_i]=1$ より、中心極限定理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=1}^{2^n} X_i \xrightarrow{w} N(0,1)$$

である。$\forall n$ で $\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i=1}^{2^n} X_i \sim X$ より、$X \xrightarrow{w} N(0,1)$ でもあり、$X \sim N(0,1)$ がいえる。 //

(10) $\frac{1}{(n-1)!}e^{-x}x^{n-1}$ はガンマ分布 $Ga(1,n)$ の密度関数である。

$Ga(1,n)$ は i.i.d. な指数分布 $Ex(1)$ に従う r.v. X_i の和の分布である。 $X_1+\cdots+X_n \sim Ga(1,n)$. よって

$$\int_0^n \frac{1}{(n-1)!}e^{-x}x^{n-1}dx = P(X_1+\cdots+X_n \leqq n)$$

$$= P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1 \leqq 0\right)$$

$$= P\left(\sqrt{n}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1\right) \leqq 0\right)$$

である。CLT より $\sqrt{n}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1\right) \xrightarrow{d} N(0,1)$ であるため

$$P\left(\sqrt{n}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-1\right) \leqq 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} P(Z \leqq 0) = \frac{1}{2}$$

$(Z \sim N(0,1))$

よって $\frac{1}{(n-1)!}\int_0^n e^{-x}x^{n-1}dx \to \frac{1}{2}$. //