

確率教理工学 (1)

情報学・工学・物理学など様々な場面で現れる「確率」その数学的な基礎を学ぶ。

→ 統計・機械学習・量子力学・粒子の運動 などなど...

“確率”は必須項目

講義概要

1. 確率空間

2. 確率変数

→ 可測関数

3. 期待値と母関数

→ ルバンの積分・モーメント母関数・特性関数

4. 確率不等式

→ データの平均が期待値のまわりにはいかに集中する?

5. 確率変数の収束

→ 法則収束・確率収束・概収束

6. 大数の法則と中心極限定理

7. 確率過程

→ ガウス過程・加法過程・マルコフ過程

8. マルコフ過程

→ 到達可能性・同値類・再帰性・定常分布

評価: レポートにふる。(予定)

参考書

- ・ 佐藤 ^{ヒロシ} 坦 『はじめの確率論, 測度の確率』
共立出版
- ・ 舟木直久 『確率論』 朝倉書店
- ・ 伊藤清 『確率論』 岩波書店
(岩波基礎数学選書)
- ・ Durrett "Probability: Theory and Examples."
Cambridge university press.

↑ オンラインで pdf 入手可

当面の目標: 「確率」を定義する。

→ $\left\{ \begin{array}{l} \text{"}\sigma\text{-加法族"} \\ \text{"確率測度"} \end{array} \right. \rightarrow \text{"確率空間"}$

「サイコロをふる」という1つ1つの試行の結果、
観測される事象の確率を定める。

- 試行 (trial) ← 試行の結果全体の集合
- Ω : 標本空間 (sample space)
- $\omega \in \Omega$: 標本点 (sample)
← 試行の結果

例 (サイコロ投擲)

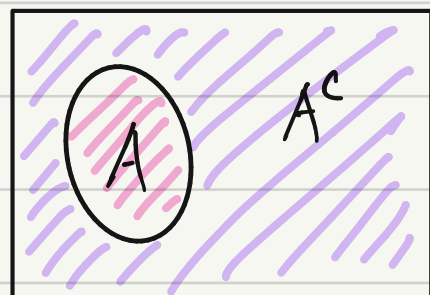
試行: サイコロをふる。

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (サイコロの目の全体)

$\omega \in \Omega$: "2"等, サイコロの目

Def (事象)

- $A \subset \Omega$: 事象 (event)
↑ 標本空間の部分集合
- $A^c := \Omega - A$: 余事象
 $= \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$ Ω



◦ $A_1 \cup A_2 := \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A_1 \text{ または } \omega \in A_2 \}$

和事象

◦ $A_1 \cap A_2 := \{ \omega \in \Omega \mid \omega \in A_1 \text{ かつ } \omega \in A_2 \}$

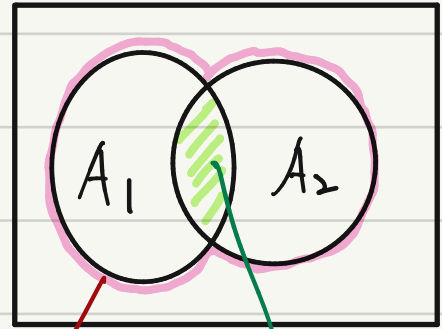
積事象

例

$A_1 = \{ \text{偶数の目} \}$
 $= \{ 2, 4, 6 \}$

$A_2 = \{ \text{3の倍数の目} \}$
 $= \{ 3, 6 \}$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \{ 6 \}, \quad A_1 \cup A_2 = \{ 2, 3, 4, 6 \}$



$A_1 \cup A_2$

$A_1 \cap A_2$

事象に「確率」を定めた。

→ 標本空間 Ω が有限集合なら難しくな。

(↑ ↓)

→ “連続”, “無限” も扱った。

下手にやると “矛盾” が起きることが知られる。

(事象をバラバラに分割して、それらを合体しても

示の “大きさ” にならない) → Banach-Tarski
 (1D, 2D, 3D, 非可測集合)

→ 確率を定義しても矛盾が生じない
体系を用意する.

この範囲の集合なら(可算)無限個の事象の
和も積を取っても大丈夫という"範囲"を定める.

→ 「 σ -加法族」 「可測空間」
「確率測度」

Def (σ -加法族) 重要

Ω の部分集合族 \mathcal{F} が σ -加法族

\Leftrightarrow

- (1) $\Omega \in \mathcal{F}$
- (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- ★ (3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ (可算無限個)
 $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{ \omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+ : \omega \in A_n \}$
も \mathcal{F} に含まれる. ($\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$)
↑ σ -加法性 (完全加法性) と言う.

★ 非可算無限和は許さない.

(1): 標本空間全体 Ω は確率を定めたい。

(2): A の確率が定まるといけば、

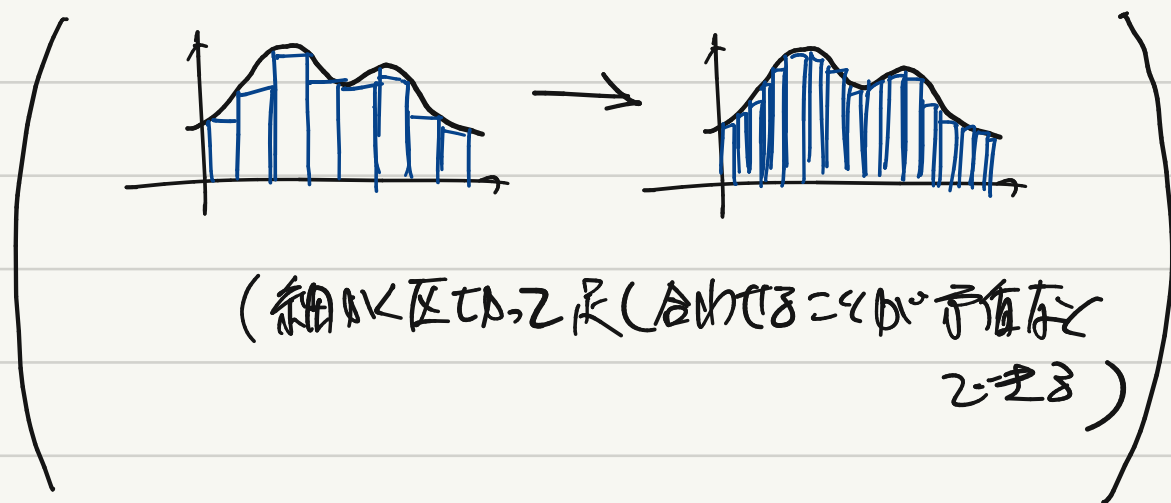
A^c の確率 (A が起らない確率) も定まるといふ。

(3): 確率の定まるといふ事象を 可算無限個 寄せ集めたものに確率は定まるといふ。

⇒ 二つのおかげで、極限操作が出来る。

→ 離散と連続をつなげられる。

→ 面積の和で積分を定義出来る。



上の性質をみたす \mathcal{F} は全 σ -加法族を各集る資格がある。

注: $A \in \mathcal{F}$ が $B \subset A$ (B は A の部分集合) であっても、 $B \in \mathcal{F}$ とは限らない。

Ω とその上の σ -加法族 \mathcal{F} の組 (Ω, \mathcal{F}) を
可測空間 と言う

← **重要!**

この可測空間に "確率" を定める。

例 $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\},$

$A_4 = \{1, 2\}, A_5 = \{1, 3\}, A_6 = \{2, 3\},$

$A_7 = \{1, 2, 3\}$

← 集合族: 集合の集合であらうことを思い出す。

$\Rightarrow \mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, \emptyset\}$

とすれば。

\emptyset 空集合

\mathcal{F} は σ -加法族 には \rightarrow 2u子。



//

★ $\mathcal{F} = \{A_1, A_6, A_7, \emptyset\}$ も σ -加法族 には \rightarrow 2u子。
("σ-加法族" は一意的に定まるわけではない。)

Def (確率測度)

$P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ が (Ω, \mathcal{F}) 上の確率測度

⇨ \mathcal{F} の元をうけて、

\mathbb{R} の値を返す関数であるという意味

つまり、 $A \in \mathcal{F}$ に対し、 $P(A) = 0.4$ とその値が決められる。



(1) $\forall A \in \mathcal{F}$ で $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

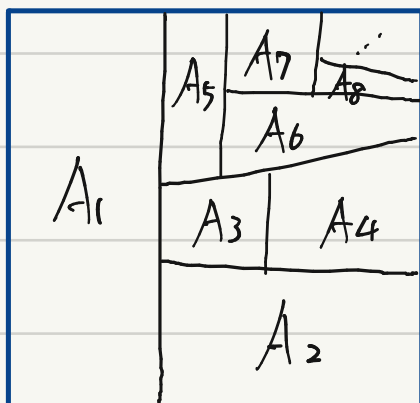
(★) (3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ が互いに排反

⇨ 可算無限個

$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ //

(★ 互いに排反 $\Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ ($\forall i \neq j$))

(3) の性質を σ -加法性 (完全加法性) と呼ぶ。



とこの確率の可算和
が全体の確率に
一致する。

* バラバラに (2 以上の) 確率を割り、それを
足し合わせたものが、元の全体の確率となる。

⇒ (Ω, \mathcal{F}, P) に (2 変なもの) を持つとき、
これが成り立たない。

(非可算無限和の場合)

"変なもの" が出てくる)

⇒ σ -加法性が成り立つ (Ω, \mathcal{F}, P) は制限

後の Borel 集合族はその一例である。

例: 線分

$\Omega = [0, 1]$, P : Ω 上の一様分布

$\mathcal{F} = \{ B_n [0, 1] \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \}$

とする。

$A_n = [1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}})$ ← ($A_n \in \mathcal{F}$ はすぐ示せる)

を考える。

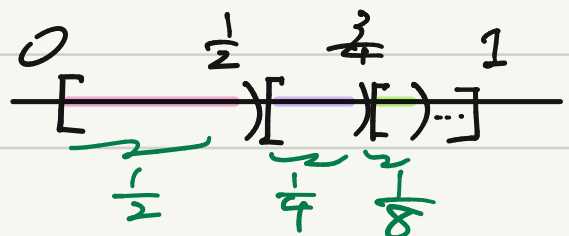
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \cup \dots\right)$$

$$= P([0, 1]) = 1$$

← はこの確率 = 0 なるので

$$P([0, 1]) = P([0, 1]) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$



可測空間 (Ω, \mathcal{F}) と Ω 上の確率測度 P の組 (Ω, \mathcal{F}, P) を 確率空間 とする

記法の補足:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{ \omega \in \Omega \mid \text{ある } n \text{ について } \omega \in A_n \}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{ \omega \in \Omega \mid \text{全ての } n \text{ について } \omega \in A_n \}$$

$$A \subset B \iff \forall \omega \in A \text{ かつ } \omega \in B \text{ である}$$

σ -代数族の中でも Borel 集合族 は重要である。

Def (Borel 集合族)

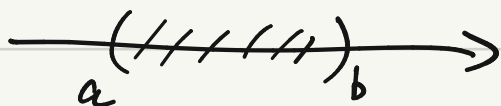
\mathbb{R} 上の Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は

\mathbb{R} の 任意の開集合 を含む 最小の
 σ -代数族 である。

Borel 集合族の元を Borel 集合と言う。 //

[参考] 一般の位相空間 S に対しても
同様に、Borel 集合族 $\mathcal{B}(S)$ は
 S の任意の開集合を含む最小の σ -代数族
として定義される。

Borel 集合族のモチベーション:



このような開区間 (a, b) の面積 (確率) は定まると
いえる。

定義より $\forall a < b$ に対し、 $(a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。

\Rightarrow 実は、 $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ を含む最小の σ -代数族
が $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ である。

○○を含む最小の σ -加法族とは?

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$: σ -加法族 かつ、これに任意の開集合を含むとする。

(つまり、 $A \subset \mathcal{R}$ が開集合なら、 $A \in \mathcal{F}_1, A \in \mathcal{F}_2$ である)
このとき、

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{ A \subset \mathcal{R} \mid A \in \mathcal{F}_1 \text{ かつ } A \in \mathcal{F}_2 \}$$

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{ A \cap B \mid A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2 \}$$

注!

これは \cup には注意!

も任意の開集合を含むことは $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ の開集合を全て含むことからわかる。

さらに、 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ は σ -加法族にもなる。

- (\because)
- (1) $\Omega \in \mathcal{F}_1, \Omega \in \mathcal{F}_2$ より $\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
 - (2) $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ なら $A^c \in \mathcal{F}_1, A^c \in \mathcal{F}_2$ であるので、 $A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ である。
 - (3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ なら、
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1$ かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_2$ であるので、
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ である。



$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ は $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ の部分集合なので、 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ より
"小さい" と言えり。

なので、開集合を全て含む σ -加法族を全て
集めてきて、その共通部分をとれば、

"最小の σ -加法族" を構成できる。

Thm

σ -加法族のインデックス

$(\mathcal{F}_u)_{u \in U}$: σ -加法族の族 (非可算濃度も可)
 $\Rightarrow \bigcap_{u \in U} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}$ は σ -加法族. //

証明は前10-11と同様なので省略 ← チェックせよ。

$\mathcal{B}(\mathcal{R}) = \bigcap \{ \mathcal{F}' \mid \mathcal{F}' \text{ は任意の開集合を} \\ \text{含む } \sigma\text{-加法族} \}$

構成のし方から、

← 上のThmより。

(1) $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は σ -加法族

(2) $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は任意の開集合を含む

さらに、 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ より小さくしてそのような条件を満たす
 σ -加法族は存在しない。

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{R})$ は \leftarrow これも $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の構成からわかる
任意の開集合を含む σ -加法族

[確率測度の基本公式]

$$(1) P(\emptyset) = 0 \quad (\text{空集合の確率は0})$$

$$(2) P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$(3) P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$$

↑ $(A_n$ は互いに排反とは限らない)

(4) B_1, B_2, \dots は互いに排反のとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$$

$$\text{例5. } \forall A \in \mathcal{F} \text{ について } P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap B_n)$$

(5) $A_n \in \mathcal{F} \quad (n=1, 2, \dots)$: 互いに排反と限らない

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(等加減性)

(6) 和の公式:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

(7) その一般化

$$S_m = \sum_{n_1 < \dots < n_m} P(A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_m})$$

(7) その一般化

$$S_m = \sum_{n_1 < \dots < n_m} P(\underbrace{A_{n_1} \cap \dots \cap A_{n_m}}_{m\text{個の積集合}})$$

とすると、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} S_m$$

(包除原理)

★ (8) 確率の連続性 I:

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$: 事象の列 ($A_n \in \mathcal{F}$ とする)

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とすると、 ($A \in \mathcal{F}$ に注意)

$$\underline{P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)}$$

★ (9) 確率の連続性 II:

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

※ この \supset は 超重要!

要は、

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$$

$$P \downarrow \quad \curvearrowright \quad \downarrow$$

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$$

(証明)

$$(1) \quad 1 = P(\Omega) = P(\underbrace{\Omega \cup \phi \cup \phi \cup \phi \cup \dots}_{\substack{\text{互いに排反} \\ (\Omega \cap \phi = \phi, \phi \cap \phi = \phi)}}) = \underbrace{P(\Omega)}_1 + \underbrace{P(\phi) + P(\phi) + \dots}_{\substack{\text{0} \leq P(\phi) \leq 1 \text{ なる } \phi \text{ がある} \\ \Rightarrow \text{0} \leq P(\phi) \leq 1 \text{ なる } \phi \text{ がある}}}$$

よ、 $0 \leq P(\phi) \leq 1$ なる ϕ がある。 $P(\phi) = 0$ なる ϕ がある。

$$(2) \quad 1 = P(\Omega) = P(\underbrace{A \cup A^c \cup \phi \cup \phi \cup \dots}_{\text{互いに排反}}) = P(A) + P(A^c) + \underbrace{P(\phi) + \dots}_0 \quad (\because (1) \text{より})$$

$$\Rightarrow 1 = P(A) + P(A^c)$$

$$(3) \quad P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) \stackrel{\phi}{=} 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$$

De Morgan の法則
(自分でも示してあげ)

(8). $B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, B_n = A_n - A_{n-1}$ とおくと.

$(B_n)_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反.

したがって $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

よって σ-加法性より

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m P(B_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=1}^m B_n\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} P(A_m) \end{aligned}$$

