

演習問題

(1) Z_0, Z_1, Z_2, \dots を独立に $N(0,1)$ に従う確率変数と仮定する。

$$X_t = t Z_0 + \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} Z_n \quad (t \in [0,1])$$

で定めらる確率過程を考慮する。

(i) $R(t,s) = E[X_t X_s]$ を計算せよ。

(ii) X_t の周辺分布を求めよ。

(iii) $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ の特性関数を求めよ。

(iv) (X_t) が Brown 運動と等しいことを確かめよ。 (連続性は示さなくてよい)

(2) 以下の生成モデルを考慮する:

$$Z \sim P_0(\lambda)$$

$Y_i \sim U([0,1])$ を独立同一に Z 個生成

このとき、 $A \in \mathcal{B}([0,1])$ に対し、

$$Z(A) = |\{i \mid Y_i \in A\}| \quad (Y_i \in A \text{ なる } i \in \{1, \dots, Z\} \text{ の個数})$$

の分布を求めよ。

(3) 各日の天気は次の遷移確率を持つマルコフ連鎖に従うと仮定する。

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{雨} \\ \text{曇} \\ \text{晴} \end{array} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} \text{雨} & \text{曇} & \text{晴} \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{array} \right] \end{array}$$

今日曜日は曇りであることが確見測りである時、

明日曜日が雨になる確率を求めよ。