演習問題

(1) 「確率測度の基本公式」を全て証明せよ。

(2) $\Omega = \{1,2,3\}$ 上の以下の集合族を考える。それぞれ σ-加法族になっているかどうか答えよ:

① $\mathcal{F} = \{\phi, \{1\}, \{1,3\}, \{1,2\}, \Omega\}$

② $\mathcal{F} = \{\phi, \Omega\}$

③ $\mathcal{F} = \{\phi, \{2,3\}, \{1\}, \Omega\}$

(3) σ-加法族 $\mathcal{F}$ に対し「$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$」を示せ。

(4) σ-加法族 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ に対し、$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ がσ-加法族にならない例を作れ。

(5) σ-加法族の列 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots$ であって $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ がσ-加法族にならない例を作れ。

(6) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}$ の部分集合で A または A^c が可算集合となる任意の集合からなる集合族とする。$P(A) = 0$ (Aが可算), $P(A) = 1$ (A^cが可算) としたとき、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間になることを示せ。

(7) Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は任意の開集合を含むことを示せ.

(8) Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は半開区間 $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ を含むことを示せ.

(9) Borel 集合族 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ は任意の開区間 (a,b) $(a<b)$ を含む最小の σ-加法族であることを示せ。

(10) $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (Ω の部分集合全体), P は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度. $P(\{1\})$, $P(\{1,2\})$ の値が定まっているとき、$\forall A \in \mathcal{F}$ に対し、$P(A)$ が一意に定まるか?

(11) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (0, 1-\frac{1}{n}]$ は $(0,1)$ か $(0,1]$ か、それともどちらでもないか答えよ。同様に $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1+\frac{1}{n})$ も求めよ。