演習問題

(1) $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ （ともに単関数：$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $A_i, B_j \in \mathcal{F}$, $(A_i), (B_j)$ らはそれぞれ互いに素）

のとき．$C_{ij} = A_i \cap B_j$ として．

X を C_{ij} を用いて単関数表示せよ．

また．$E[X] = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j P(B_j)$ を示せ．

(2) $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $Y = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ （ともに単関数）

追記（$\bigcup_i A_i = \bigcup_j B_j = \Omega$ とする）

のとき．

$X+Y$ を $C_{ij} = A_i \cap B_j$ を用いて単関数として表せ．

この表示を用いて．

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

を示せ．

(3) 単調収束定理を用いて Fatou の補題を示せ．

ヒント：$\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m \geq n} X_m(\omega) \right)$ であることから．

$Y_n(\omega) = \inf_{m \geq n} X_m(\omega)$ として．$(Y_n)_n$ に単調収束定理を適用せよ．

(4). （Fatou の補題 別バージョン）

$|X_n| \leqq Z$ が可積分な Z に対して成り立つとき．

$$E[\liminf_n X_n] \leqq \liminf_n E[X_n]$$

$$E[\limsup X_n] \geqq \limsup E[X_n]$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：$X_n + Z$ に Fatou を適用．

$-(X_n - Z)$ に Fatou を適用．

④ (4) より、優収束定理が示せる。

優収束定理の証明

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[\liminf X_n] && (\because X = \lim_n X_n \text{ より}) \\
&\leqq \liminf E[X_n] && (\because (4),\ \text{Fatouの補題}) \\
&\leqq \limsup E[X_n] && \\
&\leqq E[\limsup X_n] && (\because (4)) \\
&= E[X] && (\because X = \lim X_n \text{ より})
\end{aligned}
$$

よって、$\lim E[X_n] = E[X]$ //

(5) $X_n \geqq 0$ (a.s) のとき、

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$$

を示せ。（ヒント：単調収束定理）

(6) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n=1,2,\dots)$、$(A_n)_n$ は互いに素、で、X：可積分 のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X \mathbb{1}_{A_n}] = E\left[X \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}\right]$$

和と積分の交換

積分のσ-加法性

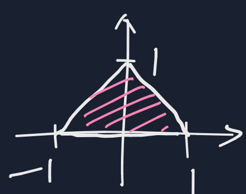
を示せ。（ヒント：優収束定理）

(7) 標準正規分布の密度関数 f が $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ をみたすことを示せ。

(8) $X \sim$ 標準正規分布 のとき、

$$Var[X] = 1$$

を示せ。



(9) (X_1, X_2) は $(-1,0), (1,0), (0,1)$ を頂点とする三角形上の一様分布に従っている。このとき $E[X_1 + X_2]$ を求めよ。

(10) 連続分布 F に対し、$E[F(X)] = \int_{\mathbb{R}} F(x)\,dF(x) = \frac{1}{2}$ を示せ。