演習問題

ヒント: 優収束定理

(1) X_n: r.v. $\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n|] < \infty$ のとき、$\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right]$ を示せ.

(2) $P(0 \le X < \infty) = 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} n E\left[\frac{1}{X}\mathbb{1}[X>n]\right] = 0$ を示せ.

(3) 優収束定理を用いて、本文中の微分と積分の交換可能性を示せ.

ヒント: $g(t,x)$ が $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ で偏1階微分可能なとき、

$0 < \forall h < \varepsilon$ で $\exists \theta \in [0,1]$ で

$$\frac{g(t+h,x) - g(t,x)}{h} = \frac{\partial}{\partial t} g(t+\theta h, x)$$

とできる。さらに $\left|\frac{\partial}{\partial t} g(t+\theta h, x)\right| \le Z$

を用いて、優収束定理を適用する.

(4) 一様分布の特性関数を求めよ.
特性関数を用いて平均と分散を求めよ.

(5) 正規分布の特性関数を導出せよ.

(6) p.d.f. が $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ である分布の特性関数を求めよ.

(7) モーメント母関数が発散する例を示せ.

(8) 特性関数の連続性 ($\phi(t_n) \to \phi(t)$ if $t_n \to t$) を示せ.

ヒント: 優収束定理

(9). $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ が2乗可積分の時.
$X_1, \ldots, X_n$ を用いて X_{n+1} を線形予測する最小2乗解をもとめよ.
つまり,

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i - X_{n+1}\right)^2\right]$$

を最小にする $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ を求めよ. (解は1つとは限らない)