演習問題

(1) $X_1, \cdots, X_n$: 独立.
ψ_i: X_iのキュムラント母関数
$S = X_1 + \cdots + X_n$ のキュムラント母関数は
$$\psi(t) = \psi_1(t) + \cdots + \psi_n(t)$$
であることを示せ.
このことより, Sのj次キュムラントは
$$K_j = K_j^{(1)} + \cdots + K_j^{(n)}$$
($K_j^{(i)}$はX_iのj次キュムラント)
であることを確かめよ.

(2) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が下半連続 とは $\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x)$ $({}^\forall x \in \mathbb{R}^d)$
をみたすことである. (同様に fが上半連続 $\Leftrightarrow$ $-f$が下半連続)
このとき,
fが下半連続 $\Longleftrightarrow$ $\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq a\}$ が閉集合 $({}^\forall a \in \mathbb{R})$
を示せ. これを用いて, 下半連続 または 上半連続な関数は
可測であることを示せ.

(3) $(\Omega, \mathcal{F})$上の可測関数の集合は, 単関数を含みかつ各点収束に
関して閉じている最小の関数クラスであることを示せ.

(4) $\sigma(X)$を, Xを可測にする最小のσ-加法族とする. $(X : \Omega \to \mathbb{R})$
つまり, $\sigma(X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))) = \sigma(\{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$.
このとき, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$が$\sigma(X)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測であるための必要十分条件は
ある可測関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を用いて $Y = f(X)$ と書けることであることを
示せ.

(5) Xの特性関数の値$\phi(t)$が$\forall t \in \mathbb{R}$で実数

$\iff$ Xと$-X$は同じ分布

(6) 特性関数ϕが$\int |\phi(t)|\,dt < \infty$のとき.

その分布は密度関数 $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\phi(t)\,dt$ をもつことを示せ.

(7) 一様分布$U([a,b])$の特性関数を求めよ.

(8) $X \sim U([-1,1])$, $Y \sim U([-1,1])$ (独立)

のとき. $Z = X + Y$の特性関数を求めよ.

また. $Z = X + Y$の分布の確率密度関数を求めよ.

(9) X, Y: 独立

このとき. $X+Y$とXが同じ分布であるなら

$Y = 0$ (a.s.) であることを示せ.