演習問題

(1) $X_n \xrightarrow{P} X$ なら、ある部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が存在して、
$X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$ とできることを示せ。
(ヒント：Borel-Cantelli の補題：ノート 9)

(2) $\left[\begin{array}{l} (X_n) \text{ が確率収束の意味でコーシー列 (コーシー in prob.)} \\ \iff \forall \varepsilon>0, \forall \delta>0 \text{ に対し、} \exists N \text{ で} \\ \qquad P(|X_n - X_m| \geq \varepsilon) \leq \delta \quad (\forall n, m \geq N) \end{array} \right]$

とする。

(a) $X_n \xrightarrow{P} X$ なら $(X_n)_n$ は コーシー列 in prob. であることを示せ。

(b) $(X_n)_n$ がコーシー in prob. のとき、ある r.v. X が存在し、
$X_n \xrightarrow{P} X$ となることを以下の手順で示せ：

(i) ある部分列 $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ が存在して、
$$P(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}) < 2^{-j}$$
とできることを示せ。

(ii) X_{n_j} は a.s. で収束することを示せ (ヒント: Borel-Cantelli)
その収束先を X とおく。(X は可測)

(iii) $X_n \xrightarrow{P} X$ を示せ。

(3) 「$(X_n)_n$ が一様可積分 $\iff \lim_{a\to\infty} \sup_n \int_{|X_n|\geq a} |X_n| \, dP \to 0$」

とする。

(X_n) が一様可積分 なら、$\sup_n E[|X_n|] < \infty$ となることを示せ。

(4) X_n は単調増大な r.v. で $X_n \xrightarrow{P} X$ とする。
このとき、$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ であることを示せ。

(5) $X_n \xrightarrow{p} X \iff$ 任意の部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ がさらなる部分列 $(X_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ を持ち、$X_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.s.} X$ である.

このことを示せ.

(6) $X_n \xrightarrow{p} X,\ Y_n \xrightarrow{p} Y$ のとき.

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X+Y$ を示せ.

(b) $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$ を示せ ((5)を用いて良い)

(7) $(X_n)_n$: i.i.d. で $E[X_n]=\mu,\ Var[X_n]=\sigma^2$ (ともに有限) のとき.

$$\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$$

となることを示せ.

(8) 以下を示せ:

(a) $X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \implies \overline{X}_n \left(= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \xrightarrow{a.s.} 0$

(b) $X_n \xrightarrow{L^p} 0 \implies \overline{X}_n \xrightarrow{L^p} 0$
$(p \geq 1)$

(c) $X_n \xrightarrow{p} 0 \implies \overline{X}_n \xrightarrow{p} 0$ とは限らないことを反例を挙げて示せ.

(d) $\overline{X}_n \xrightarrow{p} 0 \implies \frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0$

(9) (発展問題) $S \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とする.
S 上のガウス過程 G_u $(u \in S)$ とは, 任意の有限個の $\{u_1, \dots, u_\ell\} \subset S$ に対し, $(G_{u_1}, \dots, G_{u_\ell})$ が多変量正規分布に従うこととする.

ある2つのS上のGauss過程 G_u, G'_u が

(i) $E[G_u] = E[G'_u] = 0 \quad (\forall u \in S)$

(ii) $E[(G_u - G_v)^2] \leqq E[(G'_u - G'_v)^2] \quad (\forall u, v \in S)$

をみたし、G_u, G'_u がともに a.s. で u について有界かつ連続であるとする。このとき、

$$E[\sup_{u \in S} G_u] \leqq E[\sup_{u \in S} G'_u]$$

となることが知られている。（Slepianの不等式）

今、S^{d-1} を $\mathbb{R}^d$ 上の単位球面（$S^{d-1} = \{\|x\| = 1 \mid x \in \mathbb{R}^d\}$）とする。

$(A_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d}$ を A_{ij} が i.i.d. で $N(0,1)$ に従うランダム行列とする。

ある $u \in S^{d-1}, v \in S^{d-1}$ に対し、

$$G_{(u,v)} := u^T A v$$

とする。一方で、g, g' を独立な $\mathbb{R}^d$-値 r.v. とし、$g \sim N(0, I), g' \sim N(0, I)$（多変量正規分布）とする。

$$G'_{(u,v)} := u^T g + v^T g'$$

としたとき、

$$E[\sup_{(u,v) \in S^{d-1} \times S^{d-1}} G_{(u,v)}] \leqq E[\sup_{(u,v) \in S^{d-1} \times S^{d-1}} G'_{(u,v)}]$$

を示せ。また、

$$E[\|A\|] \leqq 2\sqrt{d}$$

operator-norm

$$\|A\| := \sup_{\substack{u \in S^{d-1} \\ v \in S^{d-1}}} u^T A u$$

を示せ。

(10) (9)の設定で、Gaussian集中不等式より

(参考問題) $P\left(\|A\| \geqq 2\sqrt{d} + t\right) \leqq \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (t>0)$

を示せ。(ランダム行列の作用素ノルム)

(11) X_iをi.i.d.,非負のr.v.とする。

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$ とする。

(a) $P(M_n > x) \leq nP(X_1 > x) \quad ({}^\forall x>0)$ を示せ.

(b) $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \iff nP(X_1 > n) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$

を示せ.