演習問題9

(1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff \sup_{k \geq n} |X_k - X| \xrightarrow{P} 0$

を示せ.

(ヒント：前回演習の(4)を使う)

(2) $(X_n)_n$: i.i.d. で $E[X_n]=0$, $Var[X_n]=1$ とする.

$a_n \in \mathbb{R}\ (n \geq 1)$ を用いて, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ とする.

(i) S_n が L^2-収束 $\iff \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$

を示せ. (L^2 空間が Banach 空間であることは用いて良い.)

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$ なら, S_n が概収束することを示せ.

(ヒント：補足資料の Kolmogorov の定理を参照)

(3). $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ とする. このとき, $X_n \rightsquigarrow 0 \iff \mu_n \to 0,\ \sigma_n^2 \to 0$

を示せ. 正規分布

← 正規分布

(4). $(X_n)_n$ は独立な r.v. の列で, $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ とする.

$\sum_n X_n$ が a.s. で収束 $\iff \sum_n \mu_n$ が収束し, $\sum_n \sigma_n^2 < \infty$.

を示せ.

((3)のヒントにある Kolmogorov の定理は用いても良い.)

(5) $(X_n)_n$ は i.i.d. で分布関数 $F(x)$ を持つとする.

$x_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) < 1\}$

とする. $x_0 < \infty$ とする. このとき,

$\max(X_1, \ldots, X_n) \nearrow x_0 \quad (a.s.)$

を示せ.

(6) (クーポンコレクター問題)

n 個のアイテムがある. 今. n 個のアイテムから一様分布に従って1つのアイテムを取り出す. 取り出したアイテムはまた元に戻して. 同様の試行を繰り返す. こうして、n 個のアイテム全種類を取り出すのにかかった時間を T_n とおく.

(X_k が i.i.d. に. $\{1,\dots,n\}$ 上の一様分布に従う時.
$T_n = \inf\{k \mid \{X_1,\dots,X_k\} = \{1,\dots,n\}\}$)

$$\frac{T_n}{n\log n} \xrightarrow{p} 1$$

を示せ. (ヒント: T_n の平均と分散を求めよ)

(7) 各 X_n は非負整数にのみ値を取る r.v. とする. このとき、

$$X_n \rightsquigarrow X \iff P(X_n=k) \to P(X=k) \quad ({}^{\forall}k:\text{非負整数})$$

を示せ. (X はある r.v.)

(8) $(A_n)_n$ は事象の列とする. ある $A \in \mathcal{F}$ に対し. 以下を示せ.

$$\mathbb{1}_{A_n} \rightsquigarrow \mathbb{1}_A \iff P(A_n) \to P(A)$$

(9) X, Y は独立で. 平均 0. 分散 1 の同一な分布に従っているとする.
今 $\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ と X と Y は全て同じ分布であることがわかっている.
このとき、X と Y はともに分布が $N(0,1)$ であることを示せ.

(10)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!}\int_0^n e^{-x}x^{n-1}\,dx$$
を求めよ.

(ヒント: 中心極限定理を指数分布に適用)